Durée : 4 heures

Baccalauréat STI Métropole septembre 2005
Génie électronique, électrotechnique, optique

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.
Une feuille de papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

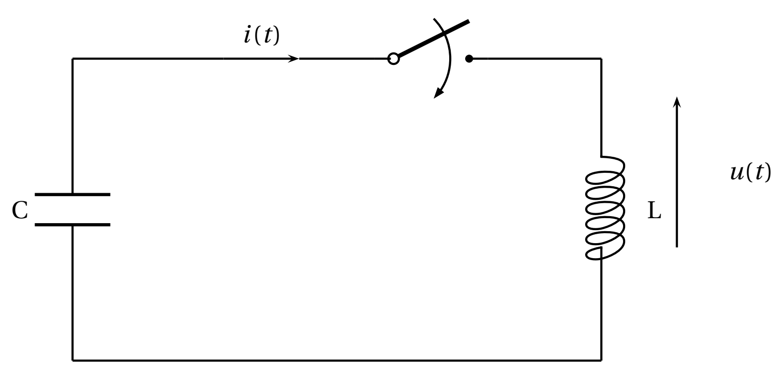
EXERCICE 1 **5 points**

On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.
Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O} ; \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité 2 cm.
Γ est le cercle de centre O et de rayon 1.
A est le point d'affixe $a = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\text{i}$.

1. Démontrer que le point A appartient au cercle Γ.
2. Soit r la transformation qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe $z' = \text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{3}}z$.
   a. Démontrer que l'affixe b du point B image de A par r est égal, à $-\text{i}$.
   b. Le point B appartient-il au cercle Γ ?
   c. Démontrer que le triangle OAB est équilatéral.
3. Donner l'affixe c du point C diamétralement opposé au point A sur le cercle Γ.
4. Soit t la transformation du plan qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe $z' = z + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\text{i}$.
   Démontrer que l'affixe d du point D image de C par la transformation t est égale à i.
5. Tracer le cercle Γ et placer les points A, B, C, D dans le repère $\left(\text{O} ; \vec{u}, \vec{v}\right)$.
6. Démontrer que le quadrilatère ABCD est un rectangle.
   a. Écrire le nombre complexe a sous forme exponentielle.
   b. Déterminer la forme algébrique de a^6.
   c. Le point d'affixe a^6 appartient-il à Γ ?

EXERCICE 2 **4 points**

Un circuit est composé d'une bobine d'inductance L, mesurée en farads, d'un condensateur de capacité C, mesurée en henrys, et d'un interrupteur. L'unité de temps est la seconde



On sait que :
$C = 125 \cdot 10^{-6}$ et $L = 200 \cdot 10^{-3}$.
à l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur, le circuit est alors parcouru par un courant.

On désigne par $q(t)$ la charge, mesurée en coulombs, du condensateur, $i(t)$, l'intensité, mesurée en ampères, du courant qui parcourt le circuit et $u(t)$ la tension, mesurée en volts, aux bornes de la bobine à l'instant t.

À l'instant $t = 0$, la charge du condensateur, mesurée en coulombs, est 10^{-3} et l'intensité du courant qui parcourt le circuit est nulle. On a donc les conditions initiales suivantes : $q(0) = 10^{-3}$ et $q'(0) = 0$.

1. On admet que la charge du condensateur est solution de l'équation différentielle (E) :

$$q''(t) + \frac{1}{\mathrm{LC}}q(t) = 0.$$

a. Résoudre l'équation différentielle (E).

b. Démontrer que l'unique solution de l'équation différentielle (E) vérifiant les conditions initiales est la fonction q définie par $q(t) = 10^{-3}\cos(200t)$ où t est un réel positif.

2. Les fonctions i et u définies dans le préambule vérifient pour tout t : $i(t) = -q'(t)$ et $u(t) = -L'(t)$, où i'est la dérivée de i.

a. Montrer que, pour tout t, $u(t) = -8\cos(200t)$.

b. La tension efficace $\mathrm{U_{eff}}$ aux bornes de la bobine est définie par :

$$(\mathrm{U_{eff}})^2 = \frac{100}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{100}} [u(t)]^2\,\mathrm{d}t.$$

Déterminer la valeur exacte de $\mathrm{U_{eff}}$
$\left(\text{on pourra utiliser la relation } \cos^2 a = \dfrac{1+\cos 2a}{2}\right)$.

PROBLÈME **11 points**

A. étude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction g définie sur l'ensemble des réels par

$$g(x) = \frac{3}{2}\mathrm{e}^{2x} - 5\mathrm{e}^{x}.$$

1. Montrer que : $g(x) = \mathrm{e}^{x}\left(\dfrac{3}{2}\mathrm{e}^{x} - 5\right)$.

2. Étudier le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

B. Étude de f et tracé de sa courbe représentative

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{3}{2}\mathrm{e}^{2x} - 5\mathrm{e}^{x} - 2x + 1.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ d'unités graphiques : 2 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.

1. Vérifier que pour tout réel x :

$$f(x) = \mathrm{e}^{x}\left(\frac{3}{2}\mathrm{e}^{x} - 5 - \frac{2x}{\mathrm{e}^{x}} + \frac{1}{\mathrm{e}^{x}}\right).$$

En déduire la limite de f en $+\infty$.

2. **a.** Déterminer la limite de f en $-\infty$.

b. Montrer que la droite D d'équation $y = -2x + 1$ est une asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ au voisinage de $-\infty$.

c. Montrer que pour tout réel x, $g(x) = f(x) - (-2x + 1)$.
En déduire la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la droite D sur $\mathbb{R}$.

3. **a.** Calculer $f'(x)$ et vérifier que, pour tout réel x,

$$f'(x) = \left(3\mathrm{e}^{x} + 1\right)\left(\mathrm{e}^{x} - 2\right).$$

b. Étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f.
On précisera la valeur exacte du minimum.

4. **a.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $3\mathrm{e}^{2x} - 5\mathrm{e}^{x} = 0$.

b. En déduire qu'il existe un unique point A de la courbe $\mathscr{C}$ où la tangente T est parallèle à la droite D.

5. **a.** Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[1~;~2]$.

b. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

6. Sur une feuille de papier millimètre, tracer D, T et $\mathscr{C}$.

C. Calcul d'aire

On considère le domaine Δ du plan compris entre la droite D, la courbe $\mathscr{C}_f$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \lambda$ où λ est un réel strictement négatif.

On note $\mathscr{A}(\lambda)$ la mesure, exprimée en unités d'aire, de l'aire de ce domaine.

1. Hachurer sur le graphique le domaine Δ.

2. Démontrer que, pout tout réel strictement négatif λ,

$$\mathscr{A}(\lambda) = \left(\frac{17}{4} + \frac{3}{4}\mathrm{e}^{2\lambda} - 5\mathrm{e}^{\lambda}\right).$$

3. Calculer $\displaystyle\lim_{\lambda \to -\infty} \mathscr{A}(\lambda)$.