Durée : 4 heures

Baccalauréat STI Génie électronique, électrotechnique, optique
Métropole septembre 2006

EXERCICE 1 **5 points**

j désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{2\pi}{3}$.

1. Résoudre, dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation d'inconnue z : $(1-2\mathrm{i})z = (1-\mathrm{i})z - 1 - \mathrm{i}$.
2. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$ d'unité graphique 4 cm, on considère les points A, B et D tels que :
   — A est le point d'affixe $z_{\mathrm{A}} = 1 - \mathrm{i}$,
   — B est l'image du point A par la rotation R de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$;
   — D est le symétrique du point A par rapport à O.
   a. Faire une figure et la compléter au fur et à mesure.
   b. Calculer le module et un argument de l'affixe z_{A} du point A.
   c. Déterminer la forme algébrique de l'affixe z_{D} du point D. Justifier.
   d. Calculer le module et un argument du nombre complexe z_{B} affixe du point B.
   e. Justifier que le triangle AOB est équilatéral, en déduire la valeur de la distance AB.
3. On note C l'image de B par la translation T de vecteur d'affixe $-1+\mathrm{i}$.
   a. Établir l'égalité vectorielle $\overrightarrow{\mathrm{AD}} = 2\overrightarrow{\mathrm{BC}}$.
   b. Démontrer que le quadrilatère OBCD est un parallélogramme.
   c. Prouver que CD = AB.
   d. En déduire que le quadrilatère ABCD est un trapèze isocèle.

EXERCICE 2 **4 points**

Un joueur lance successivement et dans cet ordre trois pièces de monnaie : une de 2 euros et deux de 1 euro.

1. Déterminer les différents résultats possibles, sachant qu'un résultat peut être considéré comme un triplet du type (P, F, P) par exemple, P désignant pile et F désignant face.
   Chaque pièce est parfaitement équilibrée. On est dans une situation d'équiprobabilité.
2. Si les trois pièces présentent leur côté face, le joueur perd 5 euros : sinon il gagne la somme des euros figurant sur les pièces présentant leur côté pile.
   Soit X la variable aléatoire qui, à chaque lancer des trois pièces, associe la somme d'argent gagnée en euros. Lorsque le joueur perd, la variable X prend alors une valeur négative.
   a. Quelles valeurs peut prendre X ?
   b. Donner la loi de probabilité de X.
   c. Calculer la probabilité de l'évènement « $X \leqslant 2$ ».
3. On dit qu'un jeu est équitable lorsque l'espérance mathématique du gain est égale à 0.
   a. Ce jeu est-il équitable ?

b. Quelle somme le joueur devrait-il perdre lorsque les trois pièces présentent leur côté face pour que ce jeu soit équitable ?

PROBLÈME **11 points**

Partie A : Détermination d'une fonction

Soit f une fonction définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$, la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthonormal $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ du plan et f' la fonction dérivée de f.
On sait de plus que :

- la droite Δ d'équation $y = 1$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$ en $-\infty$;
- la courbe $\mathscr{C}_f$ passe par le point $\text{A}(0~;~4)$
- la courbe $\mathscr{C}_f$ admet au point d'abscisse $\dfrac{1}{4}$ une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

1. Déterminer les nombres réels suivants en justifiant la réponse donnée :

a. $f(0)$ **b.** $f'\left(\dfrac{1}{4}\right)$ **c.** $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} f(x)$.

2. On admet que, pour tout réel x, $f(x) = a + (bx + c)\text{e}^{2x}$ où a, b et c sont trois constantes réelles.

a. Montrer que, pour tout réel x, $f'(x) = (2bx + b + 2c)\text{e}^{2x}$.

b. Exprimer en fonction de a, b et c les nombres réels suivants :
$f(0)$; $f'\left(\dfrac{1}{4}\right)$; $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} f(x)$ (on admet que $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} x\text{e}^{2x} = 0$).

3. a. Déduire des questions précédentes que les réels a, b et c sont solutions du système :

$$\left\{\begin{array}{l c l} a + c &=& 4\\ \dfrac{3}{2}b + 2c &=& 0\\ a &=& 1 \end{array}\right.$$

4. Résoudre ce système et donner l'expression de $f(x)$ en fonction de x.

Partie B : étude et représentation d'une fonction

On admet que f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 1 + (-4x + 3)\text{e}^{2x}.$$

C_f est la courbe représentative de f dans le repère orthonormal $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ d'unité 2 cm.

1. a. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

b. On rappelle que la droite Δ d'équation $y = l$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$ en $-\infty$.
étudier la position de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à la droite Δ.

2. a. Calculer $f'(x)$, f' étant la fonction dérivée de la fonction f.

b. Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$ et établir son tableau de variations.

3. a. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $\left[\dfrac{1}{4}~;~1\right]$.

b. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

4. En utilisant les résultats précédents, construire sur la feuille de papier millimétré, la droite δ puis la courbe $\mathscr{C}_f$ dans le repère $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.

Partie C : calcul d'une aire

On considère les fonctions h et H définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = (-4x+3)\text{e}^{2x} \text{ et } H(x) = \left(-2x + \frac{5}{2}\right)\text{e}^{2x}.$$

1. Vérifier que la fonction H est une primitive de la fonction h sur $\mathbb{R}$.

2. On appelle $\mathscr{D}$ la partie du plan comprise entre $\mathscr{C}_f$,la droite Δ d'équation $y = 1$ et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 0$.

a. Hachurer $\mathscr{D}$ sur le graphique.

b. Calculer la valeur exacte de la mesure, en cm^2, de l'aire $\mathscr{A}$ de $\mathscr{D}$ puis en donner une valeur approchée à 10^{-2} près.