∽ Baccalauréat STI Métropole & La Réunion septembre 2009 ∾
Génie électronique, électrotechnique et optique

EXERCICE 1 **6 points**

On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

Partie A

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation

$$z^2 - 8z\sqrt{3} + 64 = 0.$$

2. Soit z_0 le nombre complexe de module 2 et dont un argument est $\dfrac{\pi}{6}$.
   Calculer le module et un argument du nombre complexe z_0^3.
   En déduire la forme algébrique de z_0^3.

Partie B

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$.
On considère les points A, B et C d'affixes respectives :

$$z_{\text{A}} = 8\text{i},~ z_{\text{B}} = 4\sqrt{3} + 4\text{i} \text{ et } z_{\text{C}} = \overline{z_{\text{B}}}$$

où $\overline{z_{\text{B}}}$ désigne le nombre complexe conjugué de z_{B}.

1. Calculer le module et déterminer un argument de z_{B} puis de z_{C}
2. Vérifier que $z_{\text{A}} = 8\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{2}}$.
3. On appelle z_{D} l'affixe du point D, image du point A par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.
   a. Déterminer z_{D} et l'écrire sous la forme $r\text{e}^{\text{i}\theta}$, où r est un nombre réel strictement positif et θ un nombre réel compris entre $-\pi$ et π.
   b. En déduire que $z_{\text{D}} = -4\sqrt{3} + 4\text{i}$.
4. **a.** Placer les points A, B, C et D dans le repère $\left(\text{O}~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$ en prenant comme unité graphique 1 cm.
   b. Démontrer que le triangle OAD est équilatéral.
   c. Démontrer que le point O est le milieu du segment [CD].
   d. Déterminer la nature du triangle ACD.

EXERCICE 2 **4 points**

Pour un jeu de hasard, on place dans un sac opaque cinq jetons numérotés de 1 à 5, indiscernables au toucher.

1. Lors d'une partie, un joueur pioche au hasard dans le sac un jeton qu'il place devant lui. Il pioche ensuite au hasard un second jeton qu'il place à droite du premier, formant ainsi un nombre de deux chiffres. Le premier jeton tiré indique donc le chiffre des dizaines et le second celui des unités.
   a. À l'aide d'un arbre, écrire les 20 nombres qu'il est possible d'obtenir.

b. Soit M_2 l'évènement « le nombre obtenu est un multiple de 2 » et M_3 l'évènement « le nombre obtenu est un multiple de 3 ».
Démontrer que $P(M_2) = P(M_3)$.

c. Déterminer la probabilité de l'évènement A : « le nombre obtenu est un multiple de 3 qui n'est ni un multiple de 2 ni un multiple de 5 ».

2. Un joueur doit miser 3 euros pour faire une partie.
Si le nombre obtenu est un multiple de 2, le joueur perçoit 2 euros.
Si le nombre obtenu est un multiple de 3, le joueur perçoit 3 euros.
Si le nombre obtenu est un multiple de 5, le joueur perçoit 5 euros.
Les sommes perçues sont cumulatives. (*Par exemple, si le joueur obtient le nombre* 45 *qui est à la fois un multiple de* 3 *et de* 5*, il perçoit* 8 *euros*).
On note X la variable aléatoire qui, à chaque partie, associe le gain (positif ou négatif) finalement réalisé par le joueur en tenant compte de la mise initiale. (*Par exemple, si le joueur obtient le nombre* 45*, la variable aléatoire X prend la valeur* $8-3=5$).

a. Démontrer que les valeurs prises par la variable aléatoire X sont -3 ; -1 ; 0 ; 2 et 5.

b. Démontrer que $P(X=0) = \dfrac{1}{10}$.

c. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

3. a. Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ de la variable aléatoire X.

b. Le jeu est-il équitable ?

PROBLÈME **10 points**

Partie A : Détermination d'une fonction g

On désigne par (E) l'équation différentielle

$$2y' + y = 0,$$

dans laquelle y désigne une fonction de la variable x définie et dérivable sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$. y' désigne la fonction dérivée de y.

1. Résoudre l'équation différentielle (E).

2. Soit f la solution particulière de l'équation différentielle (E) vérifiant $f(2) = \text{e}$.
Démontrer que, pour tout nombre réel x, $f(x) = \text{e}^{2-\frac{1}{2}x}$.

3. Pour tout nombre réel x, on pose $g(x) = (2x+1)[f(x)]^2 - 9$.
Montrer que $g(x) = (2x+1)\text{e}^{4-x} - 9$.

Partie B : Étude de la fonction g

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthogonal.

1. Déterminer la limite de $g(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$.

2. a. Montrer, que pour tout nombre réel x, $g(x) = 2\text{e}^4 x\text{e}^{-x} + \text{e}^4\text{e}^{-x} - 9$.

b. Utiliser cette expression pour déterminer la limite de $g(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$.

c. En déduire que la courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote Δ dont on donnera une équation.

3. a. On désigne par g' la fonction dérivée de la fonction g. Montrer que pour tout réel x, $g'(x) = (1-2x)\text{e}^{4-x}$.

b. Déterminer le sens des variations de g et dresser le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}$.

4. **a.** Calculer la valeur exacte des nombres $g(-1)$ et $g(0)$.
   b. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[-1 ; 0]$.
   c. Donner l'arrondi au centième de α.
5. Déterminer une équation de la droite $\mathscr{D}$ tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 4.
6. **a.** Compléter le tableau de valeurs de g qui se trouve sur la feuille annexe à rendre avec la copie.
   On arrondira les valeurs à l'unité.
   b. Tracer la droite Δ, la droite $\mathscr{D}$, puis la courbe $\mathscr{C}$, dans le repère figurant sur la feuille annexe à rendre avec la copie.

Partie C : Calcul d'aire

1. Démontrer que la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par

$$G(x) = (-2x - 3)\mathrm{e}^{4-x} - 9x$$

   est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction g.
2. **a.** Hachurer la partie $\mathscr{H}$ du plan délimitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 4$.
   b. Calculer en unités d'aire la mesure exacte de l'aire de la partie $\mathscr{H}$ du plan.
   c. En déduire en cm^2 la valeur arrondie au centième de l'aire de de $\mathscr{H}$.
   On rappelle que les unités graphiques sont : 2 cm pour une unité en abscisse et 1 cm pour 10 unités en ordonnée.

Annexe du problème à rendre avec la copie

Tableau des valeurs de la fonction g (valeurs arrondies à l'unité)

x	$-0,75$	$-0,5$	$-0,25$	0	0,5	1	2	3	4	5	6
$g(x)$											

Repère orthogonal d'unités graphiques : 2 cm pour 1 unité en abscisse et 1 cm pour 10 unités en ordonnée