Baccalauréat STI Nouvelle–Calédonie novembre 2009
Génie électronique, électrotechnique et optique

EXERCICE 1 **4 points**

Le nombre i est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

Partie I

Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation d'inconnue z :

$$z^2 - 6z + 12 = 0.$$

Partie II

Le plan complexe est muni du repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$d'unité graphique 1 cm.
Soit A le point d'affixe $z_{\text{A}} = 3 + \text{i}\sqrt{3}$.

1. Déterminer le module et un argument de z_{A}. Placer le point A dans le repère $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
2. Soit R la transformation du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par $z' = \left(\text{e}^{i\frac{\pi}{3}}\right) z$.
   - **a.** Quelle est cette transformation R ? Préciser ses éléments caractéristiques.
   - **b.** On appelle B l'image du point A par la transformation R. On note z_{B} l'affixe du point B. Calculer la forme algébrique de z_{B}. Placer le point B dans le repère $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
   - **c.** Quelle est la nature du triangle OAB ? Justifier la réponse.
3. Soit T la translation de vecteur $\overrightarrow{w}$ d'affixe $z_{\overrightarrow{w}} = -2\sqrt{3}\text{i}$.
   - **a.** On appelle C l'image du point A par la transformation T. On note z_{C} l'affixe du point C. Calculer la forme algébrique de z_{C}. Placer le point C dans le repère $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
   - **b.** *Dans cette question, toute rédaction, même partielle, sera prise en compte.*
     Quelle est la nature du quadrilatère OCAB ? Justifier la réponse.

EXERCICE 2 **5 points**

1. Résoudre l'équation différentielle (E) :
   $$y'' + 4y = 0.$$
   où y est une fonction de la variable x, deux fois dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.
2. Déterminer la solution f de (E) qui vérifie : $f(0) = \frac{1}{4}$ et $f'(0) = 0$.
3. Montrer que la fonction g définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par $g(x) = 3\sin x$ est solution de l'équation différentielle $y'' + y = 0$.
4. Pour tout nombre réel x, on définit la fonction h par :
   $$h(x) = 3\sin x + \frac{1}{4}\cos 2x.$$
   Calculer $h'(x)$ pour tout nombre réel x.

5. Questionnaire à choix multiples :
pour chaque question, il y a une seule réponse exacte; recopier la réponse exacte sur la copie. Chaque réponse exacte rapporte 0,5 *point. Aucune justification n'est demandée.*

a. Quelle est la valeur de $h\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$?

$\triangleright$ 3 $\qquad$ $\triangleright$ $-\dfrac{1}{4}$ $\qquad$ $\triangleright$ $\dfrac{11}{4}$

b. Quelle est la valeur moyenne de la fonction h sur l'intervalle $[0~;~\pi]$?

$\triangleright$ $-\dfrac{3}{\pi}$ $\qquad$ $\triangleright$ 0 $\qquad$ $\triangleright$ $\dfrac{6}{\pi}$

c. Combien l'équation $h(x) = 0$ admet-elle de solutions dans l'intervalle $[0~;~2\pi]$?

$\triangleright$ 0 $\qquad$ $\triangleright$ 1 $\qquad$ $\triangleright$ 2

PROBLÈME — 11 points

Dans tout le problème, le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.
La courbe $\mathscr{C}$ tracée sur l'annexe ci-jointe est la représentation graphique d'une fonction f définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.
La courbe $\mathscr{C}$ coupe l'axe des abscisses en O et au point A de coordonnées $\left(\dfrac{3}{2}~;~0\right)$.
On admet que les tangentes à la courbe $\mathscr{C}$ aux points d'abscisses $\dfrac{1}{2}$ et 3 sont parallèles à l'axe des abscisses.
La droite Δ est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point O et passe par le point B de coordonnées $(-1~;~3)$.

Partie I Exploitation graphique de la courbe $\mathscr{C}$

1. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 0$ sur l'intervalle $\left[-\dfrac{1}{2}~;~\dfrac{7}{2}\right]$.

2. Donner le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $\left[-\dfrac{1}{2}~;~\dfrac{7}{2}\right]$.

3. Donner les valeurs $f'\left(\dfrac{1}{2}\right)$ et $f'(3)$.

4. Donner une équation de la tangente Δ. En déduire $f'(0)$.

5. Résoudre graphiquement l'inéquation $f'(x) > 0$ sur l'intervalle $\left[-\dfrac{1}{2}~;~\dfrac{7}{2}\right]$.

Partie II Étude de la fonction f

La fonction f est définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par

$$f(x) = \left(2x^2 - 3x\right)\text{e}^{-x}.$$

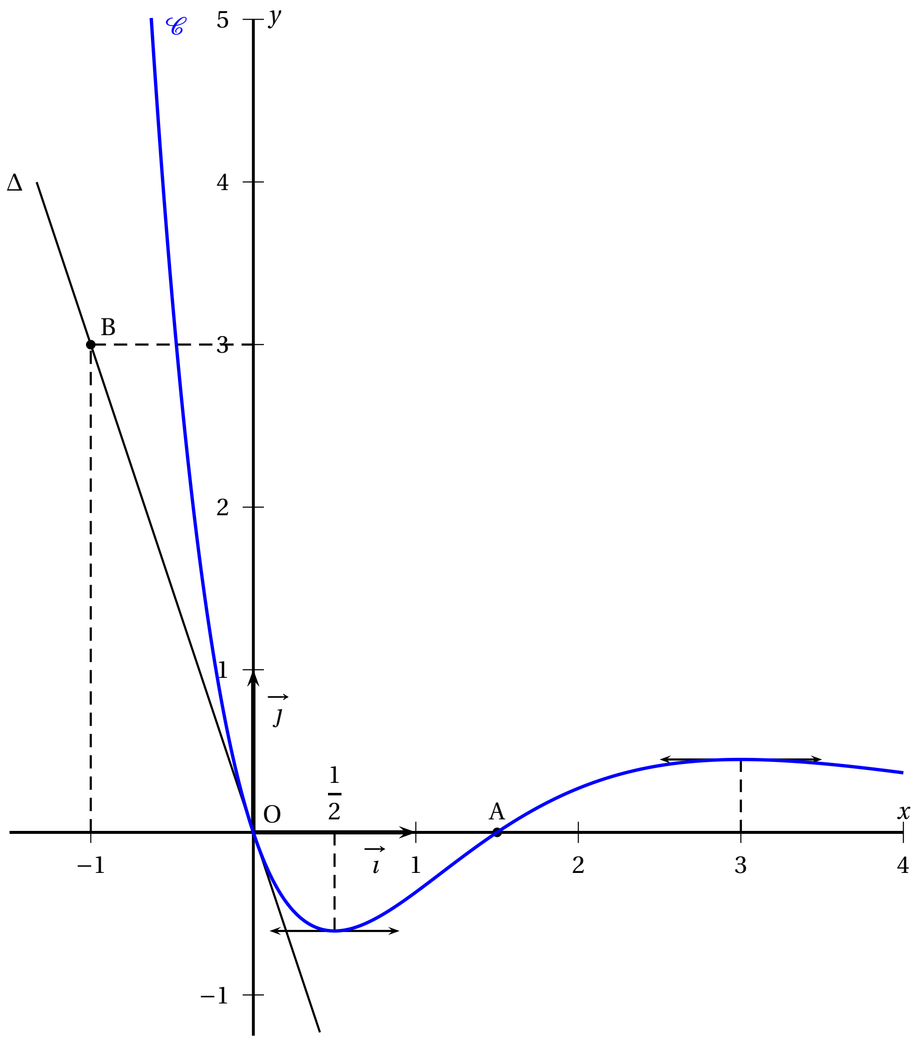
1. Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$. Justifier la réponse.

2. Justifier que pour tout nombre réel x, $f(x) = \dfrac{2x^2}{\text{e}^x} - \dfrac{3x}{\text{e}^x}$ puis déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
En déduire l'existence d'une asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.

3. On appelle f' la fonction dérivée de la fonction f. Calculer, pour tout nombre réel x, $f'(x)$ puis montrer que $f'(x) = \left(-2x^2 + 7x - 3\right)\text{e}^{-x}$.
4. Étudier le signe de $f'(x)$. En déduire les variations de la fonction f sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.
5. Déterminer une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse $\dfrac{3}{2}$.

Partie III Calcul d'aire

1. Calculer $f(2)$. Montrer que la fonction f est positive sur l'intervalle $[2\,;\,3]$.
2. Montrer que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \left(-2x^2 - x - 1\right)\text{e}^{-x}$ est une primitive de la fonction f sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.
3. Soit $\mathscr{D}$ le domaine du plan compris entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équation $x = 2$ et $x = 3$.
   a. Sur l'annexe, hachurer le domaine $\mathscr{D}$.
   b. Calculer, en unités d'aire, la valeur exacte de l'aire du domaine $\mathscr{D}$, puis donner une valeur approchée au centième de l'aire du domaine $\mathscr{D}$.



$\mathscr{C}$
y
x
Δ
B
A
O
$\frac{1}{2}$
$\vec{\imath}$
$\vec{\jmath}$
−1
1
2
3
4
5