∾ Baccalauréat STI Génie électronique Polynésie ∾
juin 2004

EXERCICE 1 **5 points**

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$ d'unité graphique 1 cm.
On considère les nombres complexes :

$$z_1 = -2+2\text{i}\sqrt{3} \qquad z_2 = 4\text{e}^{\frac{5\text{i}\pi}{6}} \qquad z_3 = 2-2\text{i}.$$

1. Déterminer le module et un argument de z_1 et de z_3.
2. Écrire z_2 sous forme algébrique.
3. Placer, dans le repère $\left(\text{O}~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$, les points A, B, C d'affixes respectives $z_1,~z_2,~z_3$.
4. **a.** Calculer le module et un argument de $\dfrac{z_2}{z_1}$.

   b. En déduire qu'il existe une rotation de centre O qui transforme A en B. On précisera l'angle de cette rotation.
5. Soit D le point d'affixe $z_4 = z_3\text{e}^{\frac{\text{i}\pi}{6}}$.

   a. Placer D dans le repère $\left(\text{O}~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$ en expliquant la construction.

   b. Écrire z_4 sous forme algébrique.

   c. Écrire z_4 sous forme algébrique et sous forme trigonométrique.

   d. En déduire les valeurs exactes de $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et de $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

EXERCICE 2 **5 points**

1. **a.** Résoudre l'équation différentielle $y' + y = 0$ sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

   b. Déterminer la solution particulière f de l'équation précédente telle que $f(0) = 1$.

   c. Déterminer la dérivée de f et en déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.
2. On considère la suite numérique (u_n) définie, pour tout entier naturel n, par $u_n = f(n) = \text{e}^{-n}$.

   a. Démontrer que (u_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{\text{e}}$.

   b. Étudier le sens de variations de la suite (u_n).

   c. Déterminer la limite de la suite (u_n).

   d. À partir de quelle valeur de n a-t-on $u_n < 10^{-8}$?
3. **a.** Exprimer, en fonction de n, la somme $S_n = 0+1+2+\ldots+n$.

   b. En déduire, en fonction de n, l'expression du produit $P_n = u_0 \cdot u_1 \cdot u_2 \ldots u_n$.

PROBLÈME **10 points**

La feuille fournie en annexe sera rendue avec la copie

Partie A : détermination d'une fonction. Tangente à une courbe

$\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ est le repère orthonormal, d'unité graphique 4 cm, donné en annexe.
La courbe $\mathcal{G}$, déjà tracée, représente une fonction g de la variable x définie sur $[0~;~+\infty[$ par $g(x) = ax^2+bx+c$ où $a,~b,~c$ sont des coefficients réels.
$\mathcal{G}$ passe par les points $\text{E}\left(\dfrac{1}{2}~;~\dfrac{1}{2}\right)$ $\text{A}(1~;~-1)$ et $\text{B}(0~;~1)$.

1. **a.** À l'aide des renseignements ci-dessus, écrire un système de trois équations vérifiées par a, b et c.
   b. En déduire que, pour tout nombre réel positif x, $g(x) = -2x^2 + 1$.
2. **a.** La courbe $\mathcal{G}$ coupe l'axe des abscisses au point K. Déterminer la valeur exacte de l'abscisse de K.
   b. Écrire une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{G}$ au point K et tracer $\mathcal{T}$ sur le graphique de l'annexe. On indiquera les points utilisés pour tracer $\mathcal{T}$.

Partie B : étude d'une fonction et tracé d'une courbe

Soit la fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = 1 - 2x^2 + \ln x$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le repère $\left(\text{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ donné en annexe.

1. **a.** Déterminer la limite en 0 de la fonction f. Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}$?
   b. En remarquant que $f(x)$ peut aussi s'écrire sous la forme
   $f(x) = 1 + x\left(-2x + \dfrac{\ln x}{x}\right)$, déterminer la limite de f en $+\infty$.
2. **a.** Déterminer la dérivée de f.
   b. Étudier le signe de cette dérivée sur $]0\ ;\ +\infty[$. Justifier.
   c. En déduire le tableau de variations de f sur $]0\ ;\ +\infty[$.
3. **a.** Calculer les coordonnées du point d'intersection de $\mathscr{C}$ et $\mathcal{G}$.
   b. Étudier les positions relatives de $\mathscr{C}$ et $\mathcal{G}$ sur $]0\ ;\ +\infty[$.
4. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ sur le graphique après avoir complété le tableau de valeurs de f donné en annexe.

Partie C Calcul d'aire

1. Soit $\mathscr{E}$ la partie du plan limitée par $\mathcal{G}$, $\mathscr{C}$ et les droites d'équations $x = \dfrac{1}{\text{e}^2}$ et $x = 1$.
   Hachurer $\mathscr{E}$.
2. Soit H la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $H(x) = x - x\ln x$. Déterminer la dérivée de H.
3. **a.** Déterminer, en explicitant le calcul, l'aire $\mathscr{A}$ du domaine $\mathscr{E}$ en unités d'aire.
   b. Écrire l'arrondi au centième de l'aire $\mathscr{A}$ exprimée en cm^2.

Cette feuille annexe est à rendre avec la copie
Annexes du problème

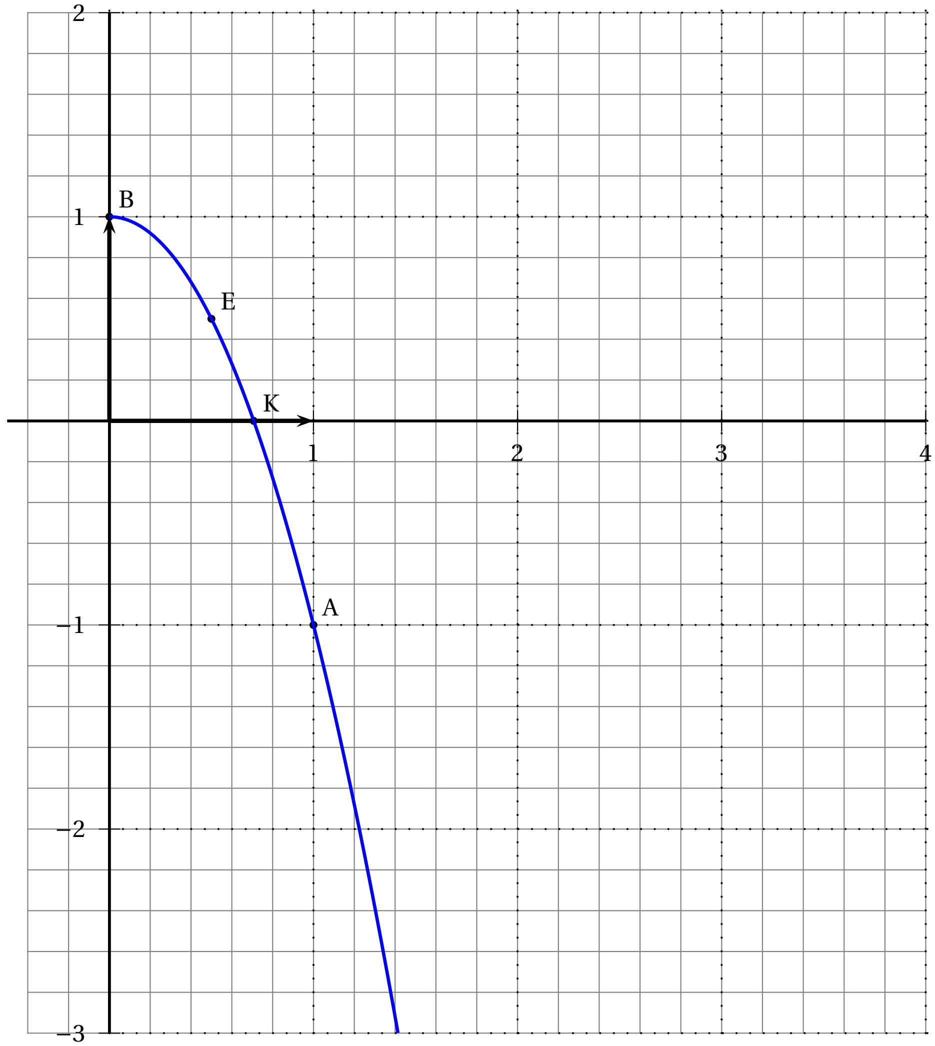

Tableau de valeurs de f

x	$\frac{1}{e^2}$	$\frac{1}{e}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{2}$
$f(x)$							