∽ Baccalauréat STI Génie électronique Métropole ∾ juin 1999

EXERCICE 1

Soit le polynôme P de la variable complexe z défini par :

$$P(z) = z^3 - z^2 + 4z + 48.$$

1. **a.** Montrer que -3 est une racine de P.
   b. En déduire une factorisation de P.
   c. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation : $P(z) = 0$.
2. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\,\overrightarrow{u},\,\overrightarrow{v}\right)$ d'unité 1 cm.
   Les points A et B sont sur le cercle de centre O et de rayon 4, leurs affixes respectives z_1 et z_2 ont pour arguments : $\dfrac{\pi}{3}$ et $-\dfrac{\pi}{3}$.
   Le point C a pour affixe $z_3 = -3$.
   a. Placer ces trois points.
   b. Donner, sous forme trigonométrique puis sous forme algébrique, les affixes de A et B.
   c. Calculer $|z_1 - z_3|$.
   d. Calculer alors, en arrondissant au degré près, l'angle $\widehat{\text{OAC}}$.
   On rappelle la formule suivante, dans un triangle PQR :

$$\text{PQ}^2 = \text{PR}^2 + \text{RQ}^2 - 2 \times \text{PQ} \times \text{RQ} \cos \widehat{\text{R}}.$$

EXERCICE 2

1. Résoudre l'équation différentielle suivante, où y est une fonction de la variable réelle t, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$:

$$9y'' + 16y = 0.$$

2. Déterminer la fonction f de léquation différentielle qui vérifie :

$$f(3\pi) = 3\sqrt{3} \quad \text{et} \quad f'(0) = 4.$$

3. Montrer que, pour tout réel t,

$$f(t) = 6\cos\left(\frac{4}{3}t - \frac{\pi}{6}\right).$$

4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$f(t) = 3\sqrt{3}.$$

5. Représenter sur le cercle trigonométrique les solutions de l'équation précédente.

PROBLÈME

Soit la fonction de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{2x} - 4\mathrm{e}^{x}.$$

On appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal d'unité 5 cm sur l'axe des abscisses et de 1 cm sur l'axe des ordonnées.

1. a. Étudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

   Pour établir la limite en $+\infty$, on pourra transformer l'expression de $f(x)$ en la factorisant par e^x.

   b. Déduire de la question précédente que $\mathscr{C}$ admet une asymptote D que l'on précisera.

2. a. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$. Dresser le tableau de variations de f.

   b. Calculer les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}$ avec les axes du repère ; on notera A le point d'intersection de $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses.

   c. Établir une équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point A.

   d. Tracer $\mathscr{C}$, D et T.

3. a. Résoudre léquation $f(x) = -3$.

   b. Soit m un nombre réel. Discuter graphiquement, suivant les valeurs de m, le nombre de solutions de l'équation : $f(x) = m$.

   c. Résoudre graphiquement, en rédigeant la méthode, l'inéquation :

   $f(x) > -3$.

4. a. Déterminer une primitive de F de f.

   b. On admet que sur $[-2~;~0]$, $\mathscr{C}$ est situé en-dessous de D. En déduire l'expression de l'aire s de la partie du plan limitée par les droites d'équation $x = -2$ et $x = 0$, par la courbe $\mathscr{C}$, et par la droite D, puis calculer s en cm^2.