Durée : 4 heures

Baccalauréat STI Génie mécanique, civil Antilles–Guyane juin 2008

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.
Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.
Le candidat doit traiter les deux exercices et le problème.

EXERCICE 1 **4 points**

Questionnaire à choix multiples

Pour chacune des quatre questions, une seule des réponses **a, b** ou **c** est exacte.
Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.

Notation : *une bonne réponse rapporte* 1 *point. Une mauvaise réponse ou une absence de réponse ne rapporte aucun point et n'en enlève aucun.*

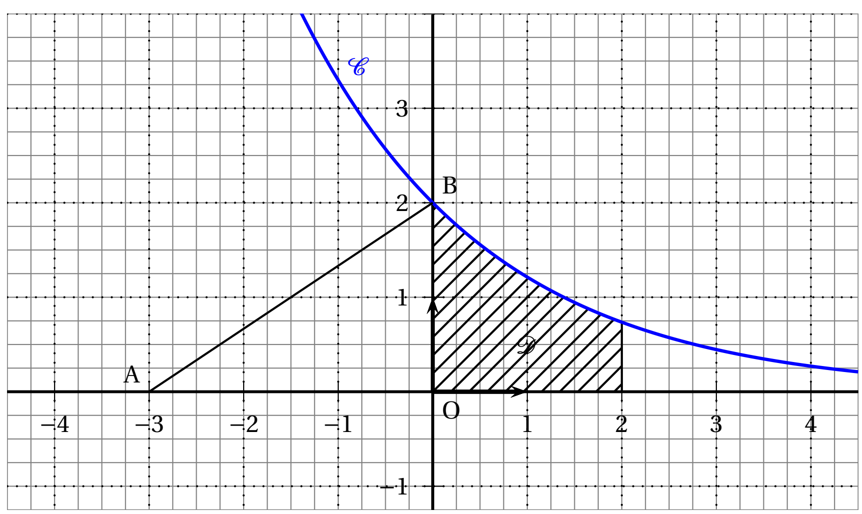
On définit la fonction f sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :

$$f(x) = 2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}.$$

Le plan est rapporté au repère orthonormal $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

On a tracé, ci-dessous, la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f dans le repère $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.
On note A et B les points de coordonnées respectives $(-3~;~0)$ et $(0~;~2)$.
On note $\mathscr{D}$ le domaine (hachuré ci-dessous) délimité par :

- la courbe $\mathscr{C}$,
- l'axe des abscisses,
- l'axe des ordonnées,
- la droite d'équation : $x = 2$.



Question 1 :
La fonction f est une solution de l'équation différentielle (E) :
Réponse a. : (E) : $2y' + y = 0$
Réponse b. : (E) : $2y' - y = 0$
Réponse c. : (E) : $y' - y = 0$.
(y désigne une fonction inconnue définie sur l' ensemble des nombres réels de variable x ; y' désigne la fonction dérivée de la fonction y.)

Question 2 :
La courbe $\mathscr{C}$ a pour asymptote la droite d'équation :
Réponse a. : $y = -2x$;
Réponse b. : $x = 0$;
Réponse c. : $y = 0$.

Question 3 :
La tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 a pour équation :
Réponse a. : $y = -2x + 2$;
Réponse b. : $y = -x + 2$;
Réponse c. : $y = x + 2$.

Question 4 :
On note S le solide de révolution engendré par la rotation du domaine $\mathscr{D}$ autour de l'axe des abscisses.
La valeur V du volume du solide S est donnée par :

$$\mathrm{V} = \pi \int_0^2 [f(x)]^2 \,\mathrm{d}x \quad \text{(en unités de volume).}$$

La valeur V du volume du solide S, en cm^3 est égale à :
Réponse a. : $4\pi\left(1 - \mathrm{e}^{-2}\right)$;
Réponse b. : $16\pi\left(1 - \mathrm{e}^{-2}\right)$;
Réponse c. : $32\pi\left(1 - \mathrm{e}^{-2}\right)$.

EXERCICE 2 **5 points**

i désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.
On considère les nombres complexes suivants

$$Z_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i},\quad Z_2 = \frac{2+\mathrm{i}}{3-\mathrm{i}} \text{ et } Z_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$$

1. Déterminer le module et un argument du nombre complexe Z_1.
2. **a.** Écrire le nombre complexe Z_2 sous forme algébrique et montrer que : $Z_2 = \overline{Z_1}$.
   b. Déterminer la forme exponentielle du nombre complexe Z_2.
3. Écrire le nombre complexe Z_3 sous forme algébrique.
4. On note Z le nombre complexe défini par : $Z = Z_2 Z_3$.
   a. Calculer le module et un argument du nombre complexe Z.
   b. Écrire le nombre complexe Z sous forme algébrique.
   c. En déduire les valeurs exactes des nombres réels $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

PROBLÈME **11 points**

La fonction f est définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = a\ln x + bx + \frac{c}{x}$$

où a, b et c sont trois nombres réels à déterminer. On note f' la fonction dérivée de la fonction f.
On a représenté la fonction f sur la feuille annexe dans un repère orthonormal $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 2 cm. On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de cette fonction f.
On note T la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1. La tangente T passe par l'origine O du repère.
La tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 2 est parallèle à l'axe des abscisses.

PARTIE A
Recherche de l'expression de $f(x)$

1. Préciser (sans justifier) les valeurs de $f(1)$, $f'(1)$ et $f'(2)$.
2. Déterminer $f'(x)$, en fonction de la variable x et des nombres réels a, b et c.
3. Exprimer $f(1)$, $f'(1)$ et $f'(2)$ en fonction des nombres réels a, b et c.
4. En utilisant les réponses aux questions 1. et 3., montrer que les nombres réels a, b et c sont solutions du système S suivant :

$$S:\quad \left\{\begin{array}{rcl} b+c &=& 1\\ a+b-c &=& 1\\ 2a+4b-c &=& 0\end{array}\right.$$

5. Résoudre le système S. En déduire une expression de $f(x)$.

PARTIE B
Étude de la fonction f

Dans la suite du problème la fonction f est définie sur l'intervalle $]0\,;\,\infty[$ par :

$$f(x) = 8\ln x - 3x + \frac{4}{x}.$$

1. Déterminer par calculs la limite de f en $+\infty$ (on peut factoriser $f(x)$ par x).
2. On rappelle que : $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$.
   En écrivant $f(x)$ sous la forme d'une seule fraction, déterminer la limite de f en 0. Interpréter graphiquement ce résultat.
3. Déterminer $f'(x)$ et vérifier que pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0\,;\,\infty[$:

$$f'(x) = \frac{(3x-2)(2-x)}{x^2}.$$

   Dresser le tableau de variations complet de la fonction f (justifier avec soin le signe de $f'(x)$.)
   Montrer que, sur l'intervalle $[4\,;\,5]$ l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution. notée α.
   Justifier l'encadrement de la solution α d'amplitude 10^{-1} suivant :

$$4{,}07 < \alpha < 4{,}08.$$

Feuille annexe