Durée : 4 heures

Baccalauréat STI Antilles-Guyane juin 2009
Génie mécanique, énergétique, civil

EXERCICE 1 **5 points**

Une agence de voyage propose trois durées de séjours - un week-end, une semaine, ou deux semaines - et deux types de destination - France ou Étranger.
Parmi les dossiers de l'agence, on constate que :

— 60 % de séjours ont lieu en France ;
— 20 % des séjours en France durent deux semaines ;
— pour les séjours en France, il y a deux fois plus de séjours d'un week-end que de séjours d'une semaine ;
— 75 % des séjours à l'étranger durent deux semaines ;
— il y a autant de séjours d'un week-end que de deux semaines.

1. L'agence a traité 250 dossiers. Reproduire puis compléter le tableau d'effectifs suivant :

	France	Étranger	Total
Le week-end			
La semaine			
Deux semaines			
Total			

2. On choisit un dossier au hasard parmi les 250 dossiers traités. Calculer la probabilité des évènements suivants (on exprimera les résultats sous forme de fractions) :

a. F : « le dossier choisi est, celui d'un séjour en France » ;

b. S : « le dossier choisi est celui d'un séjour de deux semaines » ;

c. Sachant que le dossier choisi est celui d'un séjour de deux semaines, quelle est la probabilité qu'il soit celui d'un séjour en France ?

Dans la suite, on considère que la probabilité pour un client de choisir un séjour d'un week-end ou de choisir un séjour de deux semaines est la même, égale à $0,42$.

3. Le traitement d'un dossier par l'agence a un coût : appels téléphoniques, recherches, temps passé, ...
Les frais de dossier s'élèvent pour l'agence à :

— 2 euros pour un séjour d'un week-end ;
— 5 euros pour un séjour d'une semaine ;
— 15 euros pour un séjour de deux semaines ;

Soit X la variable aléatoire qui à chaque type de dossier associe son coût.

a. Donner la loi de probabilité de X.

b. Calculer $\text{E}(X)$, espérance mathématique de X. On fera apparaître de façon détaillée l'application de la formule donnant $\text{E}(X)$.

c. Par souci de commodité, l'agence demande une somme forfaitaire à chaque client quelque soit le type de séjour qu'il a choisi.
Quelle somme doit-elle demander à chaque client pour espérer rentrer au moins dans ses frais ? Expliquer cette réponse.

EXERCICE 2 **4 points**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple (Q.C.M.).
Pour chacune des questions, trois réponses sont proposées dont une seule est exacte.
Pour chacune des questions, donner, sans justification, la bonne réponse sur la copie.
Une réponse exacte rapporte 1 point, une réponse inexacte ou l'absence de réponse est comptée 0 point.

1. Le nombre complexe $z = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$ a pour module et argument respectivement :
   Réponse A : 1 et $\dfrac{\pi}{6}$;
   Réponse B : 2 et $\dfrac{\pi}{3}$;
   Réponse C : 4 et $-\dfrac{\pi}{3}$
2. Le plan complexe est rapporté au repère $\left(\mathrm{O}~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$.
   Le point d'affixe $1 + \mathrm{i}$ appartient :
   Réponse A : au cercle de centre O et de rayon 1 ;
   Réponse B : à la droite d'équation $y = -x$;
   Réponse C : au cercle de centre O et de rayon $\sqrt{2}$.
3. Une solution de l'équation $\dfrac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}} = -\mathrm{i}$ est :
   Réponse A : 1 ; **Réponse B :** i ; **Réponse C :** 0.
4. L'ensemble des points d'affixe z tels que : $|z+\mathrm{i}| = |z-1|$ est :
   Réponse A : la droite d'équation $y = x - 1$;
   Réponse B : la droite d'équation $y = -x$;
   Réponse C : la droite d'équation $y = x$.

PROBLÈME **11 points**

La fonction f est définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = a\frac{\ln x}{x} + b,$$

où a et b sont deux nombres réels à déterminer.
f' désigne la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.
On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de cette fonction f, dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ du plan d'unité graphique 2 cm.
On a représenté la courbe $\mathcal{C}$, sur la feuille annexe.
La droite T est la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point de coordonnées (1 ; 2) ; elle coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées (0 ; 1).

Partie A : recherche de l'expression de $f(x)$

En utilisant le graphique de la feuille annexe,

1. Préciser (sans justifier) les valeurs de $f(1)$ et $f'(1)$.
2. Déterminer $f'(x)$, en fonction de la variable x, du nombre réel a et du nombre réel b si besoin.
3. Utiliser les deux questions précédentes pour déterminer les valeurs de a et b.

Partie B : étude de la fonction f

Dans la suite du problème, la fonction f est définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} + 2.$$

1. Déterminer, par le calcul, la limite de $f(x)$ en O.
En déduire l'existence d'une asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ dont on donnera une équation.

2. **a.** Démontrer, par le calcul, que la droite D, d'équation, $y = 2$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

b. Étudier par le calcul la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la droite D sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

c. Tracer la droite D sur la feuille annexe.

3. Déterminer $f'(x)$.

4. Dresser le tableau de variations complet de la fonction f en justifiant avec soin le signe de $f'(x)$.

Partie C : Calcul d'une aire

Soit g la fonction définie sur $]0~;~+\infty[$ par

$$g(x) = (\ln x)^2$$

1. Calculer $g'(x)$, où g' désigne la fonction dérivée de la fonction g.
En déduire une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

2. On considère le domaine du plan S délimité par la droite d'équation $x = 1$, la droite d'équation $x = \text{e}$, la courbe $\mathscr{C}$ et la droite D.
Calculer, en unités d'aire puis en cm^2, la mesure de l'aire du domaine S.

Feuille annexe

(à rendre avec la copie)