Durée : 4 heures

Baccalauréat STI Génie mécanique, civil Métropole 23 juin 2009

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.
Du papier millimétré est mis la disposition des candidats.
Le candidat doit traiter les deux exercices et le problème.

EXERCICE 1 **6 points**

Pour la construction d'une piscine privée, un architecte a imaginé la forme de la figure 1 (vue de dessus de la piscine), où $\left(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ est un repère orthonormal d'unité graphique 1 cm. Le périmètre de cette piscine est constitué de deux demi-cercles : $\widehat{AB}$ de centre O et de rayon 3, et $\widehat{CD}$ de centre O′ et de rayon 4, reliés par deux courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$. L'axe des abscisses est un axe de symétrie de la figure.

La courbe $\mathscr{C}$ reliant les points A et D est la courbe représentative d'une fonction f définie pour tout réel x de l'intervalle [0 ; 8].

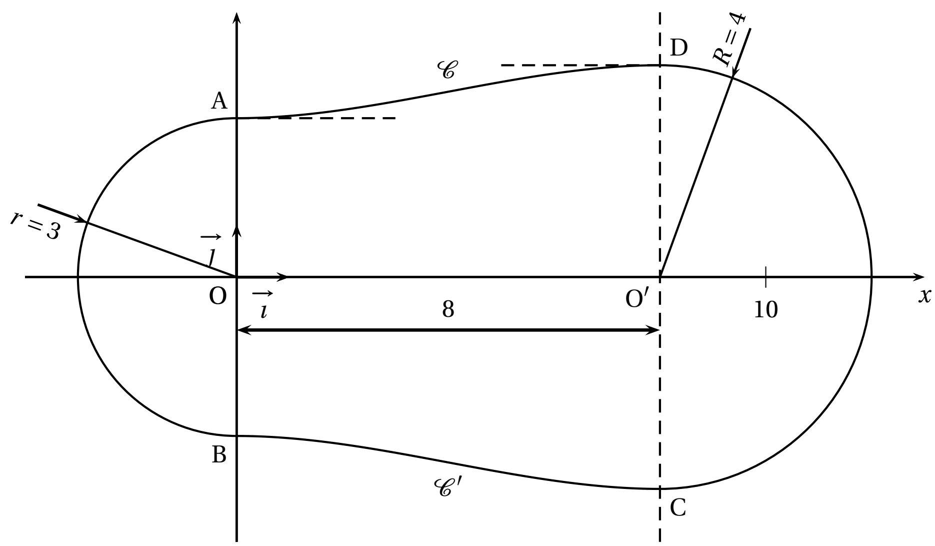

figure 1

1. **a.** En remarquant que la courbe $\mathscr{C}$ passe par le point A d'abscisse 0, le point D d'abscisse 8, et qu'en ces points elle admet une tangente horizontale, déterminer les valeurs de $f(0)$, $f(8)$, $f'(0)$ et $f'(8)$.

   b. On suppose qu'il existe quatre nombres réels a, b, c et d tels que pour tout réel x de l'intervalle [0 ; 8], $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

   Déterminer l'expression de $f'(x)$ en fonction de a, b, c, d et x.

   c. Déduire des questions précédentes que $c = 0$ et $d = 3$ et que les réels a et b vérifient le système : $\left\{\begin{array}{rcl} 512a+64b &=& 1\\ 192a+16b &=& 0\end{array}\right.$.

   d. Résoudre le système précédent.

2. Par la suite, on admet que pour tout réel x de l'intervalle [0 ; 8],

$f(x) = -\dfrac{1}{256}x^3 + \dfrac{3}{64}x^2 + 3$, et que f est strictement positive sur $[0\,;\,8]$.

Le but de cette question est de déterminer l'aire de la piscine, en m^2, sachant que la figure 1 est une représentation à l'échelle $1/100$ de la réalité.

a. Expliquer une démarche qui permet d'obtenir l'aire demandée. On rappelle que toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, pourra être prise en compte.

b. Calculer, en m^2, la valeur exacte de l'aire de la piscine réelle. Donner également la valeur arrondie à 0,1 m^2 de cette aire.

3. La profondeur d'eau de cette piscine est constante, égale à 1,60 m. Calculer, en m^3, la valeur exacte du volume d'eau contenue dans cette piscine. Donner également la valeur arrondie au m^3 de ce volume.

EXERCICE 2 — 5 points

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$ d'unité graphique 5 cm.

On considère les points A et B d'affixes respectives $z_\text{A} = 1$ et $z_\text{B} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1+\text{i})$, où i désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

Le but de cet exercice est de déterminer la valeur exacte de $\cos\dfrac{\pi}{8}$.

1. **a.** Montrer que les points A et B appartiennent au cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1.

b. Déterminer un argument de z_B.

c. Tracer le cercle $\mathscr{C}$, et placer les points A et B.

d. Soit I le milieu du segment [AB] et z_I son affixe. Placer I sur la figure et prouver que $z_\text{I} = \dfrac{2+\sqrt{2}}{4} + \dfrac{\sqrt{2}}{4}\text{i}$.

2. **a.** Calculer la distance OI, et prouver que $\text{OI} = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

b. Démontrer que la droite (OI) est la bissectrice de l'angle $\widehat{\text{AOB}}$. En déduire un argument de z_I.

c. Donner la forme trigonométrique de z_I.

3. Montrer à l'aide des résultats obtenus aux questions précédentes que la valeur exacte de $\cos\dfrac{\pi}{8}$ est $\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

PROBLÈME — 9 points

Le plan est muni d'un repère orthogonal $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ d'unités graphiques 2 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées. On s'intéresse, dans ce problème, à la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} - x + 2.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le repère $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.

Partie A : étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$g(x) = 1 - \ln x - x^2.$$

1. Calculer $g'(x)$ pour tout x appartenant à l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$. En déduire le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
2. Calculer $g(1)$ et en déduire le signe de $g(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

Partie B : étude de la fonction *f*

1. **a.** Déterminer la limite de la fonction f en 0. Interpréter graphiquement cette limite.
   b. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
   c. Justifier que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = -x + 2$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.
   d. Étudier la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la droite $\mathscr{D}$.
2. **a.** Montrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$,
   $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.
   b. Établir le tableau de variations complet de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
3. **a.** Déterminer les coordonnées du point A de la courbe $\mathscr{C}$ tel que la tangente en ce point soit parallèle à l'asymptote $\mathscr{D}$.
   b. Déterminer une équation de la droite $\mathscr{T}$, tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse e.
   On rappelle que e est le nombre réel tel que $\ln \mathrm{e} = 1$.
4. **a.** Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]0\,;\,1[$.
   On appelle B le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse α.
   b. Donner un encadrement d'amplitude 0,01 de α.
5. Dans le repère $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$, placer les points A et B puis tracer les droites $\mathscr{D}$, $\mathscr{T}$ et la courbe $\mathscr{C}$.