Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat STI novembre 2005 Nouvelle-Calédonie ∾
Génie Mécanique - Génie énergétique - Génie Civil

Un formulaire de mathématiques est distribué en même temps que le sujet. Une feuille de papier millimétré sera mise à la disposition des candidats.

EXERCICE 1 **5 points**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$, unité graphique 2 cm.
On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

1. Résolution d'une équation.
   - **a.** Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation :
   $$z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$$
   - **b.** Calculer le module et un argument de chacune des solutions.

   Soient A et M les points d'affixes respectives $a = \sqrt{3} + \text{i}$ et $m = \sqrt{3} - \text{i}$.
2. Mise en place d'une configuration géométrique.
   - **a.** Placer A et M dans le repère $\left(O\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$, en indiquant une méthode de construction.
   - **b.** On appelle B et C les points d'affixes respectives $b = \text{i}a$ et $c = \text{i}b$.
     Calculer b et c sous forme algébrique, puis placer B et C dans le repère $\left(O\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$.
   - **c.** Démontrer que le triangle ABC est rectangle et isocèle.
   - **d.** Déterminer l'affixe du point D tel que $ABCD$ soit un carré. Placer D sur la figure.
3. Soient N et P les points d'affixes respectives $n = \text{e}^{\frac{2\text{i}\pi}{3}}m$ et $p = \text{e}^{\frac{2\text{i}\pi}{3}}n$
   - **a.** Déterminer la forme algébrique de n, puis démontrer que $P = C$.
   - **b.** Démontrer que le triangle MNP est équilatéral.
4. Calculer en cm^2 l'aire du carré $ABCD$, puis l'aire du triangle MNP. On donnera les valeurs exactes puis les valeurs approchées à l'unité.

EXERCICE 2 **4 points**

Un sac contient des boules indiscernables au toucher : 1 boule rouge, 3 boules jaunes et n boules noires. (n désigne un entier naturel strictement positif).
Un club sportif organise un jeu consistant, pour chaque joueur, à prélever dans le sac une boule au hasard. Si la boule tirée est rouge, le joueur reçoit 5 €, si la boule est jaune, il reçoit 2 € et si la boule est noire, il reçoit 1 €. Pour participer au jeu, le joueur doit acheter un billet d'entrée coûtant 1,70 €.
On note X_n la variable aléatoire qui, à chaque boule prélevée dans le sac, associe le gain algébrique du joueur c'est à dire la somme reçue diminuée du prix du billet.

1. Dans cette question seulement, on suppose $n = 6$.
   - **a.** Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire X_6 ?
   - **b.** Déterminer la loi de probabilité de la variable a aléatoire X_6.
   - **c.** Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X_6.

   Dans toute la suite de l'exercice, on suppose que l'entier naturel n est quelconque.
2. Étude de la variable aléatoire X_n.
   - **a.** Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X_n.

b. Déterminer en fonction de n l'espérance mathématique de la variable aléatoire X_n

c. Le club souhaite que l'espérance de X_n soit strictement négative. Quel doit être le nombre minimal de boules noires contenues dans le sac pour que cette condition soit remplie ?

PROBLÈME 11 points

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$, unités graphiques : 2 cm en abscisses et 1 cm en ordonnées.

Partie A :

On appelle f la fonction définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x} + \ln x.$$

On appelle $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le repère $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

2. étude de la limite de f en 0

a. En utilisant le résultat : $\lim\limits_{x \to 0} x \ln x = 0$, déterminer la limite de f en 0.

b. En déduire que $\mathcal{C}$ admet une asymptote dont on donnera une équation.

3. Étude des variations de f.

a. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ et dresser le tableau de variation de f.

4. Tracer $\mathcal{C}$ dans le repère $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.

Partie B :

k désigne un entier naturel non nul. On appelle g la fonction définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par

$$g(x) = \frac{1}{x} + k \ln x.$$

On appelle $\mathcal{C}_k$ la courbe représentative de g dans le repère $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$. En particulier la courbe $\mathcal{C}_1$ est la courbe tracée à la fin de la première partie.

1. Étude des variations de g.

a. Calculer $g'(x)$ pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0~;~+\infty[$

b. Démontrer que $g'(x)$ s'annule pour $x = \frac{1}{k}$. Exprimer $g\left(\frac{1}{k}\right)$ en fonction de k.

c. Étudier le signe de $g'(x)$ sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ et dresser le tableau de variations de g. On admettra que g admet en 0 comme en $+\infty$ les mêmes limites que f.

2. On pose $x_k = \frac{1}{k}$ et $y_k = g\left(\frac{1}{k}\right)$. On appelle S_k le point de $\mathcal{C}_k$ de coordonnées $\left(x_k~;~y_k\right)$.

a. Déterminer la limite de la suite (x_k).

b. Déterminer la limite de la suite $\left(y_k\right)$.

c. Vérifier que, pour tout entier naturel non nul k, le point S_k est situé sur la courbe Γ d'équation $y = \dfrac{1 + \ln x}{x}$.

Partie C :

1. Soit H la fonction définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par :

$$H(x) = x\ln x - x.$$

Déterminer la fonction dérivée de H et en déduire une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

2. Calcul d'aire.

a. Démontrer que la fonction f est positive sur l'intervalle $[1~;~2]$.

b. Calculer l'aire du domaine plan compris entre la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 2$. On donnera le résultat final arrondi au mm^2.