Durée : 4 heures

Baccalauréat STI Génie mécanique Métropole juin 1999

EXERCICE 1 **4 points**

On considère l'expérience aléatoire suivante :
Une première urne contient cinq boules numérotées 0, 2, 4, 6, 8.
Une deuxième urne contient cinq boules numérotées 1, 2, 3, 4, 5.
On appelle « partie » le fait de tirer au hasard une boule de la première urne, puis une boule de la deuxième. Une « partie » a donc 25 résultats possibles supposés équiprobables.

1. **a.** Recopier, puis compléter le tableau donnant la somme des deux nombres obtenus pour chacun des résultats possibles.

+	0	2	4	6	8
1					
2					
3				9	
4		6			
5					

   b. Quelle est la probabilité d'obtenir pour une « partie » une somme égale à 7 ?

   c. Quelle est la probabilité d'obtenir pour une « partie » une somme paire ?

   d. Quelle est la probabilité d'obtenir pour une « partie » une somme au plus égale à 6 ?

2. On considère le jeu suivant associé à chaque « partie ». Un joueur gagne :

   30 francs si la somme est paire ;

   100 francs si la somme est treize ;

   10 francs si la somme est 1, 3 ou 5 ;

   et ne gagne rien dans les autres cas.

   On appelle X la variable aléatoire qui à chaque partie associe son gain en francs.

   a. Calculer la probabilité de gagner 100 francs.

   b. Donner sous forme de tableau la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

   c. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.

   d. L'organisateur demande 20 francs pour obtenir le droit de jouer. Ce jeu est-il équitable ?

EXERCICE 2 **4 points**

On donne l'équation différentielle :

$$y'' + 36y = 0.$$

1. Donner la forme des solutions de cette équation différentielle.
2. Déterminer la fonction f solution de cette équation différentielle satisfaisant aux conditions suivantes :
   — la courbe représentative de f passe par le point G de coordonnées (0 ; p3) ;
   — la droite tangente à cette courbe au point G a pour coefficient directeur 6.
3. Vérifier que pour tout réel x :

$$f(x) = 2\sin\left(6x + \frac{\pi}{3}\right).$$

4. Calculer la valeur moyenne de f sur l'intervalle $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{6}\right]$.

PROBLÈME **12 points**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2 - 10x\mathrm{e}^{-2x}.$$

Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$(unité graphique 2 cm).

1. Calculer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

2. **a.** Vérifier que $f(x) = 2 - \dfrac{10}{\mathrm{e}^x} \cdot \dfrac{x}{\mathrm{e}^x}$.

b. Calculer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+1$.

c. En déduire que la courbe (C) admet une asymptote (D) dont on précisera une équation.

3. **a.** Démontrer que la fonction dérivée f' de f est définie pour tout x réel par :

$$f'(x) = (20x - 10)\mathrm{e}^{-2x}.$$

b. Étudier pour tout réel x le signe de $f'(x)$, puis établir le tableau de variations de f.

c. En déduire que la courbe (C) admet une tangente horizontale en un point B dont on précisera les coordonnées.

4. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0.

5. Tracer dans le même repère $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ l'asymptote (D), la tangente (T) et la courbe (C).

6. On note g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \left(-\dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4}\right)\mathrm{e}^{-2x}$.

a. Déterminer sa fonction dérivée.

b. En déduire une primitive F de f sur $\mathbb{R}$.

7. **a.** Hachurer sur la représentation graphique le domaine (A) du plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations :
$x = 0$, $x = 3$.

b. Calculer la valeur exacte de l'aire du domaine (A) exprimée en cm^2, puis en donner une valeur décimale approchée à 1 mm^2 près.