Baccalauréat STI Antilles–Guyane juin 2002
Génie mécanique, des matériaux

EXERCICE 1 — 4 POINTS

Un sac contient 100 boules. Sur chacune de ces boules est inscrit l'un des numéros ⓪, ①, ②, ③ ou ④.
Le tableau ci-dessous donne la répartition de ces boules suivant leur numéro.

Numéro inscrit sur la boule	⓪	①	②	③	④
Nombre de boules	30	25	20	15	10

Un joueur tire au hasard une boule de ce sac.
On admet que tous les tirages sont équiprobables.

1. On note p_n la probabilité que ce joueur tire une boule portant le numéro n. Écrire les nombres $p_0,\ p_1,\ p_2,\ p_3$ et p_4. Justifier que ces nombres sont, dans cet ordre, les cinq premiers termes d'une suite arithmétique dont on précisera la raison.
2. On convient de la règle du jeu suivante :
   Soit n la numéro de la boule tirée par le joueur.
   Si le numéro n est impair, le joueur perd n euros. Son gain est alors $-n$.
   Dans tous les autres cas, le joueur gagne n euros. Son gain est n.
   a. Quelle est la probabilité que, à l'issue d'un tirage, ce joueur gagne au moins un euro ?
   b. Quelle est la probabilité que, à l'issue d'un tirage, ce joueur perde au moins un euro ?
   c. On désigne par X la variable aléatoire qui, à chaque numéro de boule tirée, associe le gain du joueur. Déterminer la loi de probabilité de X. Calculer l'espérance mathématique E(X) de X.

EXERCICE 2 — 4 POINTS

On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.
Le plan complexe $\mathscr{P}$ est muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ d'unité graphique 4 cm.

1. On considère le nombre complexe $Z = \dfrac{2+\mathrm{i}}{3-\mathrm{i}}$.
   Calculer la forme algébrique de Z ; en déduire le module et un argument de Z.
2. On considère les points A et B d'affixes respectives :
   $$\frac{1+\mathrm{i}}{2} \text{ et } \frac{1-\mathrm{i}}{2}$$
   Le point I est le milieu du segment [AB].
   a. Placer les points A, B et I.
   b. Calculer l'affixe du point I.
3. Soit C le point d'affixe :
   $$z_{\mathrm{C}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}.$$
   a. Calculer les coordonnées du point C.
   b. Montrer que les points A, B et C sont situés sur un même cercle de centre I.
   Construire le cercle et placer le point C.
   c. Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifier la réponse.

PROBLÈME 12 POINTS

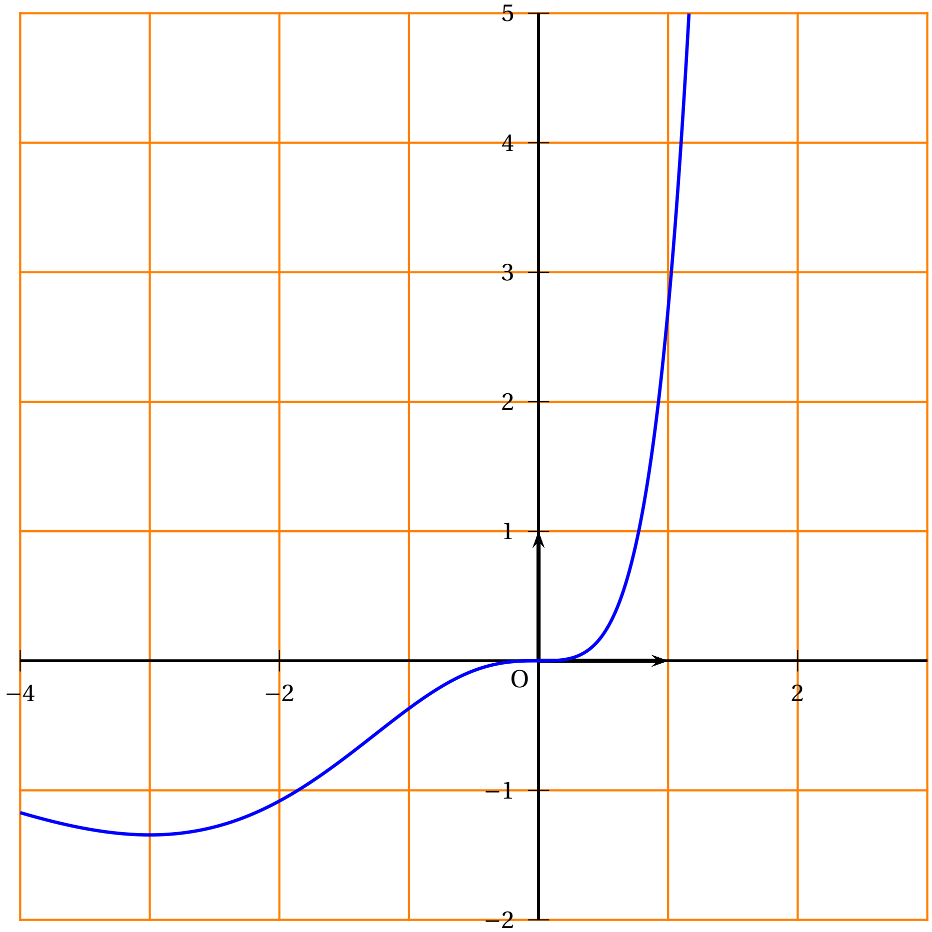
Le graphique est à complète, au fur et à mesure de la résolution du problème, et à rendre avec la copie.
Dans tout le problème le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
L'unité de longueur est 2 cm.

Partie A

On considère la fonction f définie, pour tout x de $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 e^x.$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans le repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.



On note f' la fonction dérivée de f.

1. Calculer $f'(x)$ pour tout nombre réel x.
2. Déterminer les abscisses des points de la courbe $\mathcal{C}_f$ en lesquels cette courbe admet une tangente de coefficient directeur égal à 0. Tracer ces tangentes sur la feuille annexe

Partie B

Soit g la fonction définie pour tout x de $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = x^3 e^{-x}.$$

On appelle $\mathcal{C}_g$ la courbe représentative de g dans le repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. **a.** Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$. En déduire une équation d'une asymptote à $\mathcal{C}_g$.

   b. Calculer la limite de g en $-\infty$.

2. On note g' la fonction dérivée de g.

   a. Calculer $g'(x)$ pour tout nombre réel x.

   b. Montrer que. pour tout nombre réel x :

$$g'(x) = x^2\mathrm{e}^{-x}(3 - x).$$

   c. Étudier le signe de $g'(x)$ suivant les valeurs du nombre réel x.

   d. Déterminer les variations de la fonction g.

Partie C

1. **a.** Démontrer que pour tout nombre réel x :

$$f(x) - g(x) = x^3\mathrm{e}^{-x}\left(\mathrm{e}^{2x} - 1\right)$$

   b. Étudier le signe de $f(x) - g(x)$ suivant les valeurs du nombre réel x. En déduire la position de la courbe $\mathcal{C}_f$ par rapport à la courbe $\mathcal{C}_g$.

   c. Comparer $f(0,0001)$ et $g(0,001)$ puis $f\left(-10^{-4}\right)$ et $g\left(-10^{-4}\right)$.

2. Soit a un réel. On considère le point M de coordonnées $(a\,;\ f(a))$ et le point N de coordonnées $(-a\,;\ g(-a))$.

   Démontrer que le milieu du segment $[MN]$ est le point O.

Partie C

On admet dans la suite du problème que la courbe $\mathcal{C}_g$ est la courbe symétrique de $\mathcal{C}_f$ par rapport à l'origine du repère.

1. La fonction F est définie, pour tout x de $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \left(x^3 - 3x^2 + 6x - 6\right)\mathrm{e}^{x}.$$

   Vérifier que F est une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

2. Calculer les deux intégrales $\displaystyle\int_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_{0}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$.

3. Compléter le graphique par un dessin de $\mathcal{C}_g$.

4. On considère la région $\mathcal{A}$ du plan délimitée par les courbes $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{C}_g$ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.

   a. Hachurer $\mathcal{A}$ sur le graphique.

   b. Déduire de la question 2 la valeur exacte de l'aire de $\mathcal{A}$ en cm^2.