Durée : 4 heures

Baccalauréat STI Antilles–Guyane juin 2005
Génie mécanique, génie des matériaux

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.
Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.
Le candidat doit traiter les deux exercices et le problème.

EXERCICE 1 **5 points**

Le plan complexe est muni du repère orthonormé $\left(\mathrm{O}~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$ d'unité graphique 1 cm.
On note A et B les points d'affixes respectives : $z_{\mathrm{A}} = 2+2\sqrt{3}\mathrm{i}$ et $z_{\mathrm{B}} = 6+2\sqrt{3}\mathrm{i}$.

1. **a.** Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes z_{A} et z_{B}.
   b. Que vaut la distance OA ? En déduire une construction du point A. (On expliquera la méthode de construction utilisée)
   Placer le point B.
2. **a.** Démontrer que le triangle OAB est isocèle.
   b. Donner une mesure de chacun des angles de vecteurs $\left(\vec{u},~\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)$ et $\left(\vec{u},~\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$. En déduire la mesure de l'angle géométrique $\widehat{\mathrm{AOB}}$, puis la mesure de chacun des angles géométriques $\widehat{\mathrm{ABC}}$ et $\widehat{\mathrm{OAB}}$.
3. Soit F le point d'affixe $z_{\mathrm{F}} = 4\sqrt{3}\mathrm{i}$.
   a. Placer le point F.
   b. Démontrer que le triangle OBF est équilatéral.
   c. Calculer $|z_{\mathrm{A}} - z_{\mathrm{F}}|$. Que représente le point A pour le triangle OBF ?

EXERCICE 2 **5 points**

Dans une foire un forain propose le jeu suivant.
On lance un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6, puis on fait tourner une roue portant les numéros 0, 1, 2, 3. On obtient ainsi un couple $(a~;~b)$ où le nombre a est lu sur la face supérieure du dé, le nombre b est indiqué par la roue.
On suppose dans tout l'exercice que tous les couples $(a~;~b)$, avec $a \in \{1,~2,~3,~4,~5,~6\}$ et $b \in \{0,~1,~2,~3\}$, ont la même probabilité d'être obtenus.
Le résultat du jeu est le nombre $a \times b$, produit des nombres a et b du couple $(a~;~b)$ obtenu.

1. Recopier le tableau suivant et le compléter en indiquant les résultats possibles pour un jeu.

	Nombre a lu sur le dé :					
Nombre b lu sur la roue	1	2	3	4	5	6
0				0		
1						
2			6			
3					15	

2. Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :
   — A : « Le résultat du jeu est un nombre qui appartient à l'intervalle $[5~;~9]$. » ;
   — B : « Le résultat du jeu a été obtenu à partir d'un numéro impair sur la roue. » ;
   — $C = A \cap B$;

— $D = A \cup B$.

3. Si le résultat du jeu est égal à 18, le joueur reçoit 10 € ; si le résultat du jeu appartient à l'intervalle [10 ; 17] , le joueur reçoit 5 € ; si le résultat du jeu appartient à l'intervalle [5 ; 9], le joueur reçoit 1 € ; dans les autres cas le joueur ne reçoit rien et ne perd rien.

Soit X la variable aléatoire qui, pour chaque jeu, prend pour valeur la somme reçue par le joueur.

a. Donner, sous forme de tableau, la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

b. Calculer l'espérance mathématique, notée $E(X)$, de la variable aléatoire X.

c. Sur l'ensemble de la durée de la foire, le forain compte avoir 2 000 participants à ce jeu. S'il demande 2 € de participation à chaque joueur, quel gain net pourra-t-il espérer à l'issue de la foire ?

PROBLÈME **10 points**

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unités graphiques : 2 cm sur l'axe des abscisses et 4 cm sur l'axe des ordonnées.
On considère les deux fonctions f et g définies pour tout nombre réel x, par :

$$f(x) = 2x\text{e}^x - x^2 - 2x \quad \text{et} \quad g(x) = -x^2 - 2x.$$

On nomme $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{P})$ les courbes représentatives respectives des fonctions f et g relativement au repère orthogonal $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

Partie A - Étude de la fonction g

1. Calculer la limite de la fonction g en $+\infty$ et sa limite en $-\infty$.

2. On note g' la fonction dérivée de la fonction g. Calculer $g'(x)$ pour tout nombre réel x.

3. Donner le tableau des variations de la fonction g·

Partie B - Étude de la fonction f

1. a. Vérifier que, pour tout nombre réel x non nul, $f(x) = x^2\left(2\text{e}^x - 1 - \dfrac{2}{x}\right)$. En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.

b. Calculer la limite de la fonction f en $-\infty$.

2. a. On note f' la fonction dérivée de la fonction f.
Montrer que, pour tout nombre réel x, $f'(x) = 2(x+1)\left(\text{e}^x - 1\right)$.

b. Résoudre dans l'ensemble des nombres réels l'inéquation : $\text{e}^x - 1 \geqslant 0$.
En déduire, à l'aide d'un tableau de signes, le signe de $f'(x)$ pour x réel.

c. Établir le tableau des variations de la fonction f ; y faire figurer les valeurs exactes des extremums.

Partie C - Tracé des courbes $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{P})$

1. a. Pour tout x réel, calculer $f(x) - g(x)$, puis $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - g(x)]$. Quelle conclusion peut-on en tirer pour les courbes $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{P})$?

b. Étudier le signe de $f(x) - g(x)$ selon les valeurs du réel x. En déduire les positions relatives de $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{P})$.

2. On nomme α l'unique solution non nulle de l'équation $f(x) = 0$, et A le point de la courbe $(\mathscr{C})$ d'abscisse α.
À l'aide d'une calculatrice, donner une valeur approchée décimale de α arrondie à 10^{-2}.

3. Recopier le tableau suivant et le compléter avec les valeurs approchées décimales de $f(x)$ et $g(x)$ arrondies à 10^{-2}.

x	$-2,5$	-2	-1	$-0,5$	0	0,5	1
$f(x)$							
$g(x)$							

4. Dans le repère $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$, placer le point A défini à la question C. 2., puis tracer les courbes $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{P})$.

Partie D - Calcul d'une aire

1. Soit h la fonction définie par : pour tout nombre réel x, $h(x) = (x-1)\text{e}^{x}$.

   a. On note h' sa fonction dérivée. Pour tout x réel, calculer $h'(x)$.

   b. En déduire une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction : $x \longmapsto -2x\text{e}^{x}$.

2. Soit $\mathscr{S}$ la surface plane délimitée par les courbes $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{P})$ et les droites d'équations respectives $x=-1$ et $x=0$. On note $\mathscr{A}$ l'aire, exprimée en cm^2, de la surface $\mathscr{S}$.
   Hachurer la surface $\mathscr{S}$ sur le graphique de la partie C.
   Calculer $\mathscr{A}$. En donner la valeur exacte, puis une valeur décimale approchée à 10^{-2} près.