∽ Baccalauréat STI Antilles-Guyane juin 2006 ∾
Génie des matériaux, mécanique B, C, D, E

EXERCICE 1 **4 points**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O ; \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité graphique 2 cm. On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

1. **a.** Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation d'inconnue z :

$$z^2 - 2z + 4 = 0$$

On notera z_1 la solution dont la partie imaginaire est positive, z_2 celle dont la partie imaginaire est négative.

b. Déterminer le module et l'argument de z_1 et z_2.

c. Soit $z_3 = \dfrac{4z_2}{z_1}$. Donner la forme algébrique de z_3.

2. Soit A, B et C les points du plan complexe d'affixes respectives : $z_A = 1 + i\sqrt{3}$; $z_B = 1 - i\sqrt{3}$; $z_C = -2 - 2i\sqrt{3}$.

a. Placer les points A, B, C.

b. Justifier que les points O, C et A sont alignés.

c. Démontrer que le triangle ABC est isocèle de sommet principal B.

d. Soit D le point du plan tel que ABCD soit un parallélogramme. Calculer l'affixe du point D.

e. Démonter que les droites (OA) et (BD) sont perpendiculaires.

EXERCICE 2 **6 points**

Une entreprise fabrique des pièces mécaniques cylindriques de longueur L et de diamètre D.

1. On prélève un lot de 1 000 pièces dans la production. On constate que :
— 40 pièces ont une longueur non conforme ;
— 30 pièces ont un diamètre non conforme ;
— 10 pièces ont une longueur et un diamètre non conformes.

a. Reproduire et compléter le tableau suivant :

Nombre de pièces	ayant une longueur conforme	ayant une longueur non conforme	Total
au diamètre conforme			
au diamètre non conforme			
Total			1000

b. Dans le lot de 1 000 pièces, quel est le nombre de pièces conformes, c'est-à -dire ayant une longueur conforme et un diamètre conforme ?

c. On choisit une pièce au hasard parmi les 1 000 pièces du lot précédent.

d. Calculer les probabilités des évènements suivants :
— D_1 : « la pièce a une longueur non conforme » ;
— D_2 : « la pièce a un diamètre non conforme ».

e. Définir par une phrase l'évènement $D = D_1 \cup D_2$. Calculer sa probabilité.

f. On choisit une pièce ayant une longueur conforme. Calculer à 10^{-3}, la probabilité que son diamètre soit conforme.

2. On admet que dans cette partie la proportion de pièces fabriquées ayant une dimension non conforme est égale à 6 %. L'entreprise possède une machine de contrôle destinée à rejeter les pièces ayant une dimension non conforme. Des tests ont montrés que cette machine accepte toutes les pièces conformes mais ne rejette que 75 % des pièces non conformes.

a. On considère le même lot de 1 000 pièces fabriquées. Recopier et compléter le tableau suivant :

	Pièces conformes	Pièces conformes	Total
Pièces acceptées			
Pièces rejetées	0		
Total			1 000

b. Le coût de fabrication d'une pièce (conforme ou non conforme) est de 15 euros. Son prix de vente est de 25 euros.

Une pièce conforme rapporte donc 10 euros et une pièce non conforme rejetée coûte 15 euros à l'entreprise.

On admettra qu'une pièce non conforme non rejetée est vendue 25 €, puis remplacée avec un coût supplémentaire pour l'entreprise de 30 €.

Soit X la variable aléatoire qui, à chaque pièce choisie au hasard dans le lot de 1 000 pièces, associe le gain (positif ou négatif) correspondant pour l'entreprise.

i. Donner l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X.

ii. Donner, sous forme de tableau, la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

iii. Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ de cette variable aléatoire.
En admettant que le lot étudié dans cet exercice soit représentatif de la production de l'entreprise, que représente $E(X)$ pour l'entreprise ?

PROBLÈME **10 points**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 2 + (x+1)\mathrm{e}^{-x}.$$

On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.
On prendra pour unité graphique : 2 cm.

Partie A : Étude de la fonction f

1. Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.

2. a. En utilisant la forme développée $f(x) = 2 + x\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-x}$, déterminer la limite de f en $+\infty$.

b. En déduire l'existence d'une asymptote Δ à la courbe $\mathscr{C}$ et donner une équation de cette asymptote.
Étudier la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à celle de son asymptote Δ

a. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
Montrer que pour tout réel x, $f'(x) = -x\mathrm{e}^{-x}$.
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue x, $f'(x) = 0$.

b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$ et dresser le tableau de variations de la fonction f.

3. On appelle T la tangente à la courbe en son point d'abscisse -1.
Déterminer une équation de la droite T.

4. **a.** Sachant que $2 < \mathrm{e} < 3$, justifier que $f(-2) < 0$.
   b. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[-2\ ;\ 0]$.
   c. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, une valeur approchée de α au centième près par excès.
5. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ et les droites Δ et T dans le plan muni du repère $\left(\mathrm{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

Partie B : Calcul d'une aire

1. Soit F, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = 2x - (x+2)\mathrm{e}^{-x}.$$

   Montrer que la fonction F est une primitive de la fonction f.
2. Soit $\mathscr{D}$ le domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = \alpha$, α étant la valeur trouvée à la question 4. de la partie A.
   a. Hachurer le domaine $\mathscr{D}$ sur le graphique obtenu à la question 6 de la partie A.
   b. Calculer, en fonction de α, la valeur exacte, en unités d'aire, de l'aire $\mathscr{A}$ du domaine $\mathscr{D}$.
   c. En utilisant la valeur approchée de α déterminée dans la question A 5. c., donner une valeur approchée de l'aire $\mathscr{A}$ en cm^2.