Baccalauréat STI Nouvelle–Calédonie novembre 2002
Génie des matériaux, mécanique A et F

EXERCICE 1 **5 points**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$, l'unité graphique étant le centimètre.

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation :

$$(z-11\text{i})\left(z^2-16z+89\right)=0.$$

2. On donne les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 8-5\text{i}$, $z_B = 8+5\text{i}$ et $z_C = 11\text{i}$.
   a. Placer A, B et C. La figure sera complétée au fur et à mesure des questions.
   b. Calculer $|z_C - z_B|$ et interpréter géométriquement le résultat obtenu.
   c. Démontrer que ABC est un triangle isocèle.
3. D est le point d'affixe $z_D = -2$ et B′ le milieu du segment [AC].
   a. Calculer l'affixe du point B′.
   b. Calculer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{DB'}$.
   c. En déduire que les points D, B et B′ sont alignés.
   d. En déduire que (DB) est la médiatrice du segment [AC].
4. Justifier que la droite (DO) est une médiatrice du triangle ABC.
5. Quel est le centre du cercle passant par A, B et C ?

EXERCICE 2 **5 points**

Lors de la « foire aux affaires », dans un magasin de bricolage, un client s'intéresse à une meuleuse d'angle et à une scie sauteuse. On admet, pour ce client, les hypothèses suivantes :
- La probabilité qu'il achète la meuleuse d'angle est $0,60$.
- La probabilité qu'il achète la scie sauteuse est $0,46$.
- La probabilité qu'il achète la meuleuse d'angle ou la scie sauteuse est $0,64$.

On désigne par M l'évènement « le client achète la meuleuse d'angle » et par S l'évènement « le client achète la scie sauteuse ».

1. Quelques calculs préliminaires :
   a. Calculer la probabilité de l'évènement « le client n'achète pas la meuleuse d'angle ».
   b. Montrer que la probabilité de l'évènement « le client achète la meuleuse d'angle et la scie sauteuse » est $0,42$.
   c. Calculer la probabilité de l'évènement $\overline{M} \cap S$.
2. Reproduire et compléter le tableau suivant :

	M	$\overline{M}$	
S	0,42		0,46
$\overline{S}$			
	0,60		1

3. La meuleuse d'angle coûte 12,96 € et la scie sauteuse 15,09 €. On désigne par D la variable aléatoire égale à la dépense, en euros, du client.
   a. Déterminer les différentes valeurs de la variable aléatoire D.
   b. Établir la loi de probabilité de D.
   c. Calculer l'espérance mathématique de D. On en donnera l'arrondi au centime d'euro.
   d. Quel chiffre d'affaires le magasin peut-il espérer réaliser si 50 clients, intéressés par ces deux appareils, se présentent pendant cette « foire aux affaires » ?

PROBLÈME **10 points**

Première partie :

Soit p la fonction polynôme définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par

$$p(X) = 3X^3 - 7X^2 + 4.$$

1. Montrer que pour tout nombre réel X, $p(X) = (X-1)\left(3X^2 - 4X - 4\right)$.
2. Factorisation de p :
   a. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $3X^3 - 7X^2 + 4 = 0$.
   b. En déduire une écriture de $p(X)$ sous la forme d'un produit de trois polynômes du premier degré.
3. **a.** Démontrer que pour tout nombre réel x,

$$3\mathrm{e}^{3x} - 7\mathrm{e}^{2} + 4 = \left(\mathrm{e}^{x} - 1\right)\left(\mathrm{e}^{x} - 2\right)\left(3\mathrm{e}^{x} + 2\right).$$

   b. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{R}$ l'équation $3\mathrm{e}^{3x}x - 7\mathrm{e}^{2x}x + 4 = 0$.
   c. Étudier le signe de $3\mathrm{e}^{3x} - 7\mathrm{e}^{2x} + 4$ pour x appartenant à l'ensemble $\mathbb{R}$.

Deuxième partie :

On considère l'équation différentielle $E\ :\ y' + 2y = 0$.

1. Résoudre l'équation E ;
2. Déterminer la solution particulière f de l'équation E vérifiant $f(\ln 2) = 1$, ou ln représente la fonction logarithme népérien.

Troisième partie :

On appelle f et g les fonctions respectivement définies sur l'ensemble $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 4\mathrm{e}^{-2x} \quad \text{et} \quad g(x) = 7 - 3\mathrm{e}^{x}.$$

On appelle $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ les courbes représentatives des fonctions f et g dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$. Unités graphiques : 6 cm en abscisses et 2 cm en ordonnées.

1. Limites et asymptotes
   a. Calculer les limites de f et de g en $-\infty$ et en $+\infty$.
   b. En déduire pour chacune des courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$, l'existence d'une droite asymptote nommée D pour la courbe $\mathscr{C}$ et D$'$ pour la courbe $\mathscr{C}'$. Donner une équation pour chacune de ces droites.
2. Variations

a. Étudier les variations de f et de g sur $\mathbb{R}$.

b. Dresser les tableaux de variation de f et g.

3. Positions respectives de $\mathscr{C}$ et de $\mathscr{C}'$.

a. Montrer que pour tout nombre réel x,

$$f(x) - g(x) = \text{e}^{-2x}\left(3\text{e}^{3x} - 7\text{e}^{2x} + 4\right).$$

b. En déduire les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}$ et de $\mathscr{C}'$.

c. Justifier que sur l'intervalle $[0 ; \ln 2]$, $\mathscr{C}$ est en dessous de $\mathscr{C}'$.

4. Construire D, D$'$, $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ dans le repère orthogonal $\left(\text{O} ; \vec{\imath} ; \vec{\jmath}\right)$ dont on rappelle que les unités graphiques sont 6 cm en abscisses et 2 cm en ordonnées.

5. On désigne par $\mathscr{P}$ le domaine plan limité par les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \ln 2$.

a. Hachurer $\mathscr{P}$.

b. Calculer la valeur exacte, en cm^2 , de l'aire de $\mathscr{P}$. En donner l'arrondi au mm^2.