Durée : 4 heures

Baccalauréat STI La Réunion juin 2006
Génie des matériaux, génie mécanique B, C, D, E

EXERCICE 1 **4 points**

Partie A

On désigne par (E) l'équation différentielle : $2y' + y = 0$ où y est une fonction numérique définie et dérivable sur l'ensemble des nombres réels.

1. Résoudre l'équation (E).
2. Déterminer la solution particulière f de (E) telle que $f(0) = 0,5$.

Partie B

La direction d'un musée vient de faire l'acquisition d'une nouvelle statue et elle souhaite réaliser un socle en bois pour y déposer celle-ci. On appelle V le volume de ce socle dont la forme est donnée sur la feuille annexe jointe.
Le socle est constitué de deux parties.

1. La première partie est un cylindre de révolution de $0,50$ m de rayon et de $0,50$ m de hauteur. Calculer la valeur exacte, en m^3, du volume V_1 de cette première partie.
2. Le volume V_2 de la deuxième partie est celui du solide de révolution engendré par la rotation autour de l'axe des abscisses, du domaine plan limité par l'axe des abscisses, la courbe représentative de la fonction f d'équation
$y = 0,5\mathrm{e}^{-0,5x}$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 0,5$.
On précise que la valeur exacte, en m^3, de ce volume est donnée par la formule :

$$V_2 = \pi \int_0^{0,5} [f(x)]^2 \,\mathrm{d}x.$$

   a. Calculer V_2.

   b. En déduire que la valeur exacte, en m^3, du volume du socle est :

$$V = \frac{\pi\left(3 - 2\mathrm{e}^{-0,5}\right)}{8}.$$

   c. Donner la valeur arrondie du volume V à 10^{-3} près.

EXERCICE 2 **5 points**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$ (unité graphique : 2 cm).

On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation suivante :

$$\mathrm{i}z = -\sqrt{3} + \mathrm{i}.$$

   Exprimer la solution sous forme algébrique.

2. Soit A le point d'affixe z_A défini par $z_A = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$.

a. Déterminer le module et un argument de z_A.

b. En déduire que l'écriture algébrique de z_A est $1 + i\sqrt{3}$.

3. On désigne par B et C les points dont les affixes z_B et z_C sont définies par :

$$z_B = -z_A \quad \text{et} \quad z_C = z_A^2.$$

a. Écrire z_B et z_C sous forme algébrique.

b. Placer les points A, B et C dans le plan complexe.

c. Montrer que le triangle ABC est un triangle rectangle.

4. On note D le point d'affixe z_D définie par $z_D = \dfrac{4}{z_A}$.

Montrer que $z_D = \overline{z_A}$ où $\overline{z_A}$ désigne le nombre complexe conjugué de z_A.

5. On note E le point de la droite (AC) dont l'affixe z_E est un nombre réel. Calculer z_E.

PROBLÈME **11 points**

On note I l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

Partie A

Soient a et b deux nombres réels.
On considère la fonction numérique f définie, pour tout nombre réel x de I, par :

$$f(x) = x^2 + ax + b - 2\ln x.$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ (unité graphique : 2 cm). Soit A le point de coordonnées $(1\,;\,-3)$.
Calculer les valeurs respectives des nombres réels a et b pour que, d'une part la courbe $\mathcal{C}$ passe par le point A et que, d'autre part, la tangente à cette courbe au point A admette un coefficient directeur égal à 0.

Partie B

Dans toute la suite du problème, on étudiera la fonction numérique f définie, pour tout nombre réel x de I, par :

$$f(x) = x^2 - 4 - 2\ln x.$$

1. a. Déterminer la limite de la fonction f en 0.

b. Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathcal{C}$?

2. a. Vérifier que, pour tout nombre réel x de I, on a $f(x) = x\left(x - \dfrac{4}{x} - 2\dfrac{\ln x}{x}\right)$.

b. En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.

3. Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f puis montrer que, pour tout nombre réel x de I, on a $f'(x) = \dfrac{2(x-1)(x+1)}{x}$.

4. Étudier le signe de la fonction f' sur I et dresser le tableau de variations de la fonction f sur I.

5. Déterminer le signe de $f(x)$ quand le nombre réel x appartient à l'intervalle $[1\,;\,2]$.

6. Tracer la courbe $\mathcal{C}$ dans le repère $\left(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.

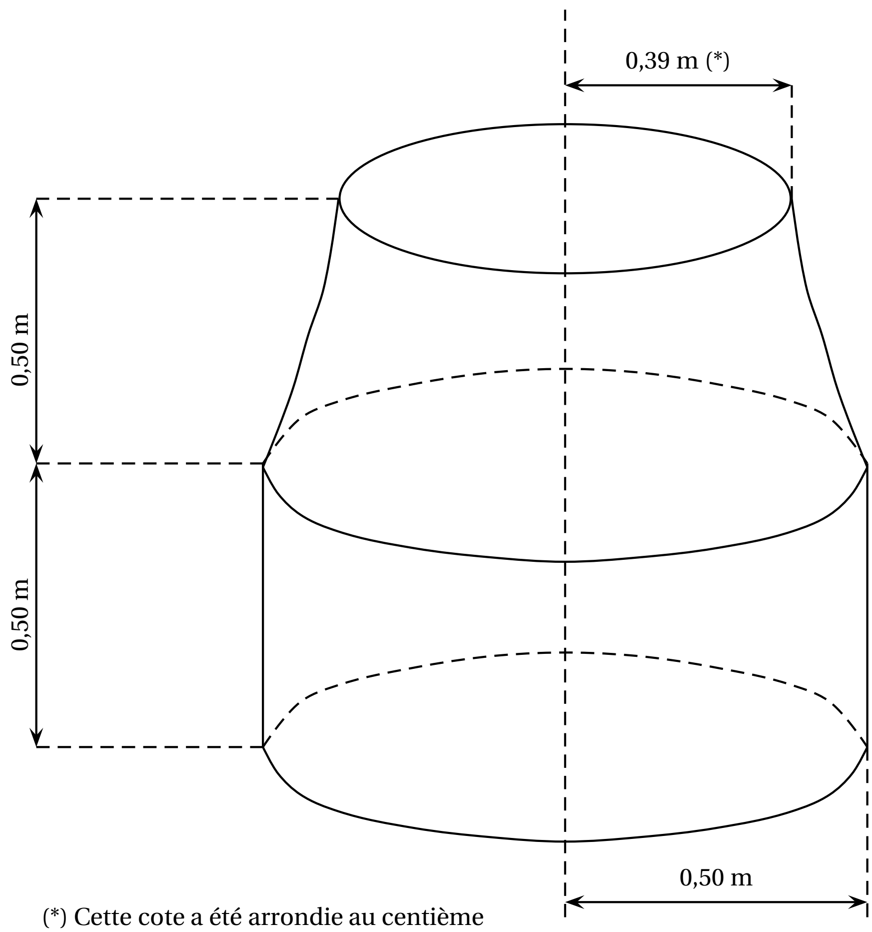
Partie C

Soit H la fonction numérique définie, pour tout nombre réel x de I, par :

$$H(x) = x\ln x - x.$$

1. Calculer $H'(x)$ où H' désigne la fonction dérivée de H.
2. En déduire une primitive F de la fonction f sur I.
3. On appelle Δ la partie du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$. Hachurer Δ. Calculer la valeur exacte de l'aire de Δ en unités d'aire, puis en cm^2.

Annexe de l'exercice 1



(*) Cette cote a été arrondie au centième