∽ Baccalauréat STI Métropole juin 2003 ∾
Génie des matériaux, mécanique B, C, D, E

EXERCICE 1 **4 points**

1. **a.** Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^2+2z+2=0.$$

b. Résoudre dans $\mathbb{C}-\{1\}$ l'équation : $\dfrac{z+1}{z-1}=2-\mathrm{i}$. On écrira la solution sous forme algébrique.

2. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$, on donne les points A, B et C d'affixes respectives $z_{\mathrm{A}}=-1+\mathrm{i}$, $z_{\mathrm{B}}=-1-\mathrm{i}$ et $z_{\mathrm{C}}=2+\mathrm{i}$.

a. Représenter les points A, B et C dans le repère $\left(\mathrm{O}~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$.

b. Quelle est la nature du triangle ABC ? Le justifier.

c. En déduire l'affixe du point Ω centre du cercle circonscrit au triangle ABC et le rayon r de ce cercle.

EXERCICE 2 **5 points**

Soit l'équation différentielle : $4y''+\pi^2y=0$.

1. Résoudre cette équation différentielle.
2. Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$. Déterminer la fonction g solution de cette équation différentielle qui satisfait aux conditions suivantes :
   - la courbe représentative de g passe par le point N de coordonnées $\left(\dfrac{1}{2}~;~\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$;
   - la tangente à cette courbe en N est parallèle à l'axe des abscisses.
3. Vérifier que pour tout nombre réel x, $g(x)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{2}x-\dfrac{\pi}{4}\right)$.
4. Résoudre sur l'intervalle $[-2~;~2]$ l'équation $g(x)=-\dfrac{1}{2}$.

PROBLÈME **11 points**

Soit f la fonction numérique définie, pour tout nombre réel x, par :

$$f(x)=\mathrm{e}^{2x}+x.$$

Soit $\mathscr{C}$ la représentation graphique de f dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$. (Unités graphiques : 2 cm sur l'axe des abscisses, 1 cm sur l'axe des ordonnées).

1. Étude du comportement de f en $-\infty$.

a. Déterminer la limite de f en $-\infty$.

b. Montrer que $\mathscr{C}$ admet pour asymptote la droite Δ d'équation : $y=x$.

c. Étudier les positions relatives de Δ et de $\mathscr{C}$.

2. Étude du comportement de f en $+\infty$:
Déterminer la limite de f en $+\infty$.

3. étude des variations de f

a. Déterminer la fonction dérivée f' de f.

b. Établir le tableau de variations de f.

4. Déterminer une équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1. Vérifier que le point A $(1\ ;\ \mathrm{e}^2+1)$ appartient à T.

5. Dans le repère$\left(\mathrm{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ tracer Δ, T et $\mathscr{C}$.

6. **a.** Justifier que l'équation $f(x) = 0$ a une solution α et une seule sur $[-1\ ;\ 0]$.

   b. Donner un encadrement de α à 10^{-2} près. Justifier le résultat.

7. Soit $\mathscr{D}$ la partie du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = \alpha$, et $x = 1$.

   a. Hachurer la partie $\mathscr{D}$.

   b. Calculer, en unités d'aire et en fonction de α, la valeur exacte de l'aire $\mathscr{A}(\alpha)$ de la partie $\mathscr{D}$.

   c. Vérifier, en utilisant l'égalité $f(\alpha) = 0$, que $\mathscr{A}(\alpha) = \dfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^2 - \alpha^2 + \alpha + 1\right)$.

   d. Déterminer, au mm^2 près, une valeur approchée de $\mathscr{A}(\alpha)$ en prenant $-0,43$ comme valeur approchée de α.