Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat STI Métropole 21 juin 2012 ∾
Génie mécanique, génie des matériaux

Exercice 1 **5 points**

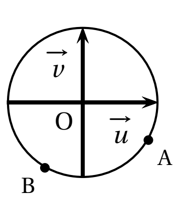
Cet exercice est un Questionnaire à Choix Multiples. Les différentes situations proposées sont indépendantes.
Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une seule réponse par question est acceptée et aucune justification n'est demandée. Une bonne réponse rap- porte un point. Une mauvaise réponse ou l'absence de réponse n'apporte ni n'enlève de point.
Indiquer sur la copie le numéro de la question et la réponse choisie correspondante.

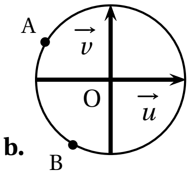
Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\,\overrightarrow{u},\,\overrightarrow{v}\right)$.

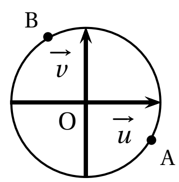
On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

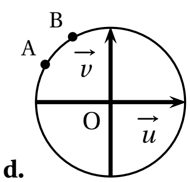
Soient A et B les points d'affixes respectives z_{A} et z_{B} telles que $z_{\text{A}} = \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{6}}$ et $z_{\text{B}} = \text{e}^{-\text{i}\frac{2\pi}{3}}$.

1. Les points A et B, images de z_{A} et z_{B}, sont représentés sur l'une des figures ci-dessous. Laquelle ?

a. 

b. 

c. 

d. 

2. Un argument de $\dfrac{z_{\text{A}}}{z_{\text{B}}}$ est égal à :

   a. $-\dfrac{5}{4}$ **b.** $-\text{i}\dfrac{\pi}{2}$ **c.** $-\dfrac{\pi}{2}$ **d.** $\dfrac{\pi}{6}$

3. La longueur AB est égale à :

   a. $\sqrt{3}$ **b.** $\sqrt{2}$ **c.** 0 **d.** $\sqrt{2-\sqrt{3}}$

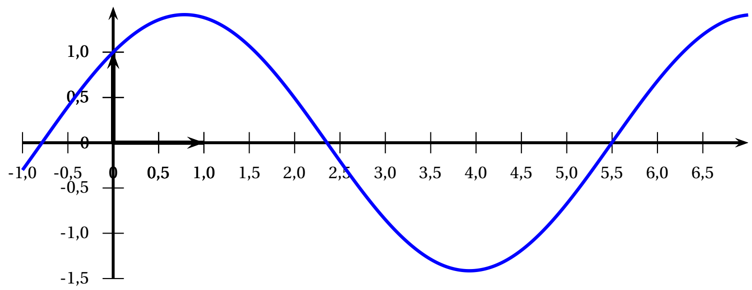
4. Soit z_{C} le nombre complexe défini par $z_{\text{C}} = z_{\text{B}}^2$.

   a. $z_{\text{C}} = \text{e}^{-\text{i}\frac{4\pi}{9}}$ **b.** $z_{\text{C}} = \text{e}^{\text{i}\frac{24\pi}{3}}$
   c. $|z_{\text{C}}| = 2$ **d.** Les points B et C sont symétriques par rapport à O.

5. Dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $z^2 + z + 1 = 0$:
   a. n'admet pas de solution ;
   b. admet deux solutions complexes : z_{A} et $\overline{z_{\text{A}}}$;
   c. admet deux solutions complexes : z_{B} et $\overline{z_{\text{B}}}$;
   d. admet deux solutions réelles : $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

EXERCICE 2 **4 points**

1. Soit y une fonction de la variable réelle x définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
   On note y'' sa dérivée seconde.
   Résoudre l'équation différentielle (E) : $y'' + y = 0$.
2. Déterminer la solution particulière f de (E), de dérivée notée f', vérifiant les conditions :
$$f(0) = 1 \quad \text{et} \quad f'(0) = 1$$
3. On admet que $f(x)$ peut s'écrire :
$$f(x) = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$
   et qu'une représentation graphique de cette fonction est donnée ci-dessous.



   Par lecture graphique, répondre aux questions suivantes :
   a. Combien de solutions possède l'équation $f(x) = 1,5$ sur $[0 ; 2\pi]$?
   b. Combien de solutions possède l'équation $f(x) = 1$ sur $[0 ; 2\pi]$?
   c. Combien de solutions possède l'équation $f(x) = 0$ sur $[0 ; 2\pi]$?
4. Résoudre, dans l'intervalle $[0 ; 2\pi]$, l'équation $f(x) = 0$.

PROBLÈME **11 points**

Partie A - Calcul de volume

Une entreprise souhaite construire un conteneur métallique (voir la figure 1) pour le commercialiser .

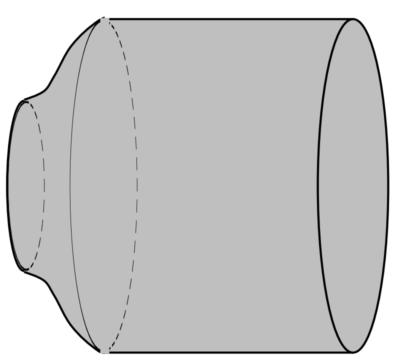


Figure 1 - Le conteneur

Ce conteneur est composé d'un cylindre et d'un goulot. Ce goulot est obtenu en faisant tourner, autour de l'axe des abscisses, la courbe C_f d'une fonction f, définie et dérivable sur l'intervalle $[0; 1]$, et représentée par l'arc $\overset{\frown}{AB}$ de la figure 2.

On appelle f' la dérivée de la fonction f sur $[0\,;\,1]$.
Le repère utilisé est orthonormal d'unité graphique : 1 m.
On donne : A(0 ; 1) ; B(1 ; 2) ; C(4 ; 2).
On précise que la courbe C_f admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses en A et en B.

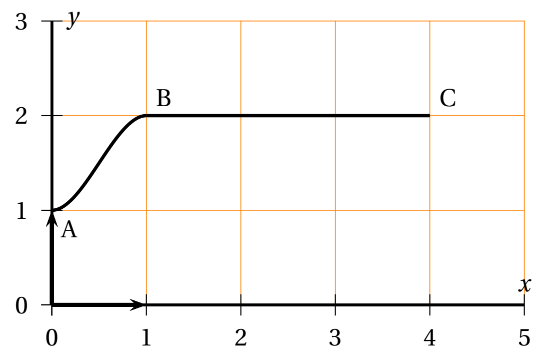


Figure 2 - Coupe latérale du conteneur

1. À partir des données précédentes, préciser les valeurs de :

$$f(0) \quad ; \quad f(1) \quad ; \quad f'(0) \quad ; \quad f'(1).$$

2. On admet qu'il existe deux nombres réels a et b tels que, pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,1]$, $f(x) = ax^3 + bx^2 + 1$.
On cherche à déterminer ces deux nombres.

a. À l'aide de la question 1, montrer que les nombres a et b vérifient le système :
$$\left\{\begin{array}{lcl} a+b+1 & = & 2\\ 3a+2b & = & 0\end{array}\right.$$

b. En déduire les valeurs de a et b, puis $f(x)$ sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.

3. On admet que, sur l'intervalle $[0\,;\,1]$, on a :

$$[f(x)]^2 = 4x^6 - 12x^5 + 9x^4 - 4x^3 + 6x^2 + 1$$

Déterminer une primitive de la fonction d'expression $[f(x)]^2$ sur $[0\,;\,1]$.

4. Le volume du goulot engendré par C_f sur $[0\,;\,1]$ est donné en m^3 par :

$$\pi \int_0^1 [f(x)]^2\,\mathrm{d}x.$$

a. Calculer la valeur arrondie au dm^3 du volume du goulot.

b. En déduire la valeur arrondie au dm^3 du volume total du conteneur.

Partie B - Étude de l'évolution des ventes

On admet que l'évolution des ventes de ce conteneur métallique est modélisée par la fonction g définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ et d'expression :

$$g(x) = \frac{400}{16\mathrm{e}^{-x} + 4} - 20$$

où x désigne le nombre de mois écoulés depuis le début de la fabrication des conteneurs et $g(x)$ le nombre de conteneurs vendus par mois.
On note C_g la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthonormé.

1. a. Déterminer la limite de g en $+\infty$.

b. Que peut-on en déduire pour la courbe C_g ?

c. Comment interpréter ce résultat pour l'évolution des ventes ?

2. **a.** Soit g' la fonction dérivée de g sur $[0\,;\,+\infty[$. Montrer que :

$$g'(x) = \frac{6400\mathrm{e}^{-x}}{(16\mathrm{e}^{-x}+4)^2}$$

b. Déterminer le signe de $g'(x)$ en justifiant la réponse et en déduire le tableau de variation de g.

3. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Justifier que l'entreprise devrait dépasser 70 conteneurs vendus par mois au cours du quatrième mois de production.