Baccalauréat STI Métropole septembre 2000
Génie des matériaux, mécanique

EXERCICE 1 **4 points**

On considère l'équation différentielle

$$(E): \quad 16y'' + y = 0,$$

dans laquelle l'inconnue y est une fonction de la variable réelle x, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, et y'' la dérivée seconde de y.

1. Résoudre l'équation différentielle (E).
2. Déterminer la solution particulière g de (E) telle que :

$$g(0) = -\sqrt{3} \quad \text{et} \quad g'(\pi) = \frac{\sqrt{2}}{8}\left(\sqrt{3}+1\right).$$

3. Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$ on a : $g(x) = 2\sin\left(\frac{x}{4} - \frac{\pi}{3}\right)$.
4. Résoudre dans $[0\,;\,8\pi[$ l'équation : $g(x) = 1$.

EXERCICE 2 **4 points**

Le plan complexe P est rapporté au repère orthonormal direct $\left(\text{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$, d'unité graphique 1 cm.

On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

1. Résoudre, dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation :

$$z^3 - 12z^2 + 48z = 0.$$

2. Soient A et B les points du plan d'affixes respectives z_{A} et z_{B} telles que :

$$z_{\text{A}} = 6 + 2\text{i}\sqrt{3} \quad \text{et} \quad z_{\text{B}} = 6 - 2\text{i}\sqrt{3}.$$

   a. Placer A et B dans le plan.
   b. Calculer le module et un argument de z_{A} et z_{B}.
   c. Démontrer que le triangle OAB est équilatéral.
   d. Soit Ω le point d'affixe 4.
   Démontrer que les points O, A et B se trouvent sur un cercle (Γ) de centre Ω.

PROBLÈME **12 points**

Partie A

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $\text{I} =]0\,;\,+\infty[$ par :

$$g(x) = x^2 - 2\ln x.$$

1. Étudier le sens de variation de g et dresser son tableau de variations.
   (On ne demande pas de calculer les limites aux bornes de I.)
2. En déduire que pour tout nombre réel x strictement positif : $g(x) > 0$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle I par :

$$f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} + \frac{1+\ln x}{x}.$$

On note $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

1. **a.** Étudier la limite de f en 0 et en déduire l'existence d'une asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$.

   b. En remarquant que $f(x)$ peut s'écrire :

   $$f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} + \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x}.$$

   étudier la limite de f en $+\infty$.

2. **a.** Montrer que pour tout nombre réel x de l'intervalle I, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{2x^2}$.

   b. Déduire de la Partie A le signe de $f'(x)$, puis le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle I.

   c. Dresser le tableau de variations de f.

3. Soit (D) la droite d'équation : $y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{3}{2}$.

   a. Montrer que la droite (D) est asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$.

   b. Déterminer par le calcul les coordonnées du point d'intersection de la courbe $(\mathscr{C})$ et de la droite (D).

   c. Sur l'intervalle I, déterminer la position de la courbe $(\mathscr{C})$ par rapport à la droite (D).

4. Construire avec soin, dans le repère $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$, la droite (D) et la courbe $(\mathscr{C})$.

Partie C

On considère la fonction h définie sur l'intervalle I par :

$$h(x) = \frac{1+\ln x}{x}.$$

1. En remarquant que $h(x)$ est de la forme $u'(x)u(x)$, déterminer une primitive de la fonction h.
2. On considère la partie du plan limitée par la courbe $(\mathscr{C})$, la droite (D) et les droites d'équation : $x = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ et $x = \mathrm{e}^2$.

   Hachurer cette partie de plan, puis calculer son aire en cm^2.