∽ Baccalauréat STI Métropole septembre 2012 ∽
Génie mécanique, des matériaux

EXERCICE 1 **5 points**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM).
Les deux situations proposées sont indépendantes.
Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Une seule réponse par question est acceptée et aucune justification n'est demandée.
Une bonne réponse rapporte un point. Une mauvaise réponse ou l'absence de réponse n'apporte ni n'enlève de point.
Indiquer sur la copie la référence de la question et la réponse choisie correspondante.

1. Parmi les fonctions dont l'expression est donnée ci-dessous, déterminer celle qui est solution de l'équation différentielle

$$4y'' + y = 0.$$

a. $f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}$	**c.** $f(x) = \cos\left(\dfrac{x}{2}\right) + \sin\left(\dfrac{x}{2}\right)$
b. $f(x) = \mathrm{e}^{4x}$	**d.** $f(x) = \cos(2x) + \sin(2x)$

2. Soient deux nombres complexes z_A et z_B tels que $z_A = \mathrm{e}^{\frac{5\mathrm{i}\pi}{6}}$ et $z_B = \mathrm{e}^{\frac{-2\mathrm{i}\pi}{3}}$.
Un argument du nombre complexe $\dfrac{z_A}{z_B}$ est égal à :

a. $\dfrac{\mathrm{i}\pi}{6}$	**b.** $\dfrac{\pi}{6}$	**c.** $\dfrac{-\mathrm{i}\pi}{2}$	**d.** $-\dfrac{\pi}{2}$

3. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par : $f(x) = \ln(x) - x$.
La limite de f en $+\infty$ vaut :

a. $-\infty$	**b.** $+\infty$	**c.** 0	**d.** -1

4. u est une suite géométrique de raison -5 et de premier terme $u_0 = 2$.
Laquelle de ces affirmations est exacte ?

a. $u_3 = -13$	**b.** $u_3 = -10$	**c.** $u_3 == 250$	**d.** $u_3 = -250$

5. La somme des cent premiers entiers strictement positifs vaut :

a. 5 000	**b.** 10 000	**c.** 5 050	**d.** 9 990

EXERCICE 2 **5 points**

Une société souhaite mettre sur le marché un nouveau jeu à gratter, dont le principe est le suivant.

Chaque ticket est composé de deux cases :
la première case représente soit un soleil, soit une lune ;
la seconde case représente soit un cœur, soit un pique.
La société compte commercialiser 10 000 tickets répondant aux contraintes suivantes :

- 10 % de ces tickets comportent un soleil ;
- 1 % des tickets présentant un soleil comportent un cœur ;
- 0,5 % des tickets présentant une lune comportent un cœur.

1. **a.** Représenter les différents tickets possibles.
   b. Justifier que le nombre de tickets comportant un soleil et un pique est égal à 990.
2. Compléter le tableau fourni en annexe, à rendre avec la copie.

3. Un joueur reçoit 1 000 euros lorsqu'il obtient un soleil et un cœur, 50 euros lorsqu'il obtient une lune et un cœur, 10 euros lorsqu'il obtient un soleil et un pique, 0 euro sinon.
On admet que chaque ticket a la même probabilité d'être choisi par le joueur.
On appelle X la variable aléatoire qui prend comme valeurs les gains précédents.

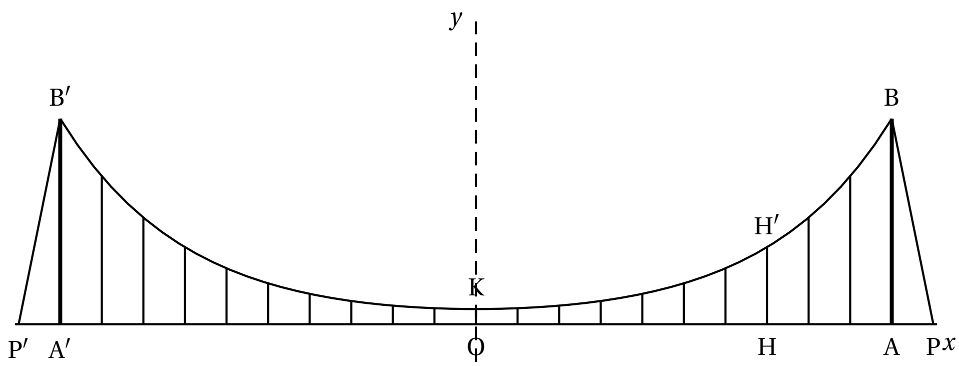
a. Déterminer la loi de probabilité de X.

b. Calculer l'espérance mathématique $\text{E}(X)$ de la variable aléatoire X.
Que représente $\text{E}(X)$ pour le joueur ?

4. La société qui commercialise ce jeu vend chaque ticket 3 euros.
Quel est le bénéfice réalisé par la société pour la vente des 10 000 tickets, en admettant qu'ils ont tous été vendus ?

PROBLÈME **10 points**

Le dessin ci-dessous schématise la vue latérale d'un pont suspendu entre deux pylônes modélisés par les segments [AB] et [A′B′]. Les câbles verticaux, comme celui modélisé par le segment [HH′], sont régulièrement espacés les uns des autres. La longueur AA′ est de 220 mètres.



Dans le dessin ci-dessus, le point O et les demi-droites [Ox) et [Oy) permettent de définir un repère orthonormal $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ dans lequel le point A aura pour coordonnées (110 ; 0), l'unité étant le mètre.
On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-110~;~110]$ d'expression :

$$f(x) = \frac{\text{e}^{0,06x} + 1}{\text{e}^{0,03x}}$$

On admet que l'arc $\overset{\frown}{\text{B}'\text{KB}}$ est la courbe représentative, dans le repère donné, de la fonction f sur l'intervalle $[-110~;~110]$.

Partie A - Une propriété de la courbe représentative

1. Montrer que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $[-110~;~110]$:

$$f(x) = \text{e}^{0,03x} + \text{e}^{-0,03x}.$$

2. On remarque que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $[-110~;~110]$,
$f(-x) = f(x)$.
Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de la fonction f ?

Partie B - Étude de la fonction f

1. Soit f' la fonction dérivée de f sur $[-110~;~110]$.
Montrer que : $f'(x) = \dfrac{0,03\left(\text{e}^{0,06x} - 1\right)}{\text{e}^{0,03x}}$.

2. a. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $\text{e}^{0,06x} - 1 > 0$.

b. En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[-110\ ;\ 110]$, puis dresser le tableau de variations de f.

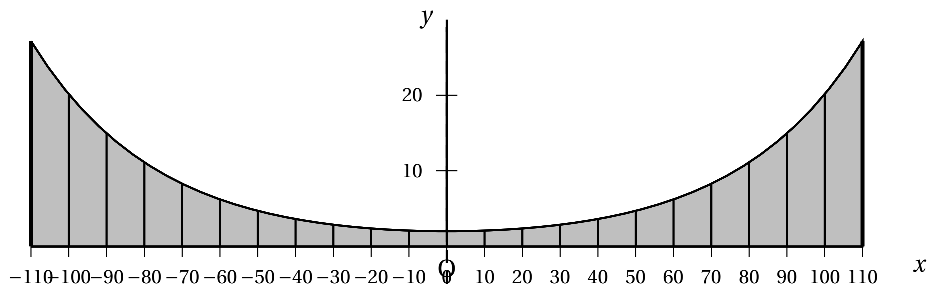
3. À l'aide du tableau de variation, donner en mètres :

a. la longueur du câble vertical le plus court ;

b. la hauteur du pylône représenté par le segment [AB] dont on donnera une valeur approchée à $0,1$près.

Partie C - Étude de la résistance au vent

On s'intéresse maintenant à la résistance au vent de la structure verticale du pont suspendu.
Un bureau d'étude affirme que l'aire de la surface exposée à l'action du vent est égale au dixième de l'aire de la surface plane, pleine et fermée, délimitée par les segments [B′A′], [A′A], [AB] et l'arc BKB′.
Cette surface est représentée par la partie grisée sur la figure ci-dessous :



1. Soit la fonction F, définie et dérivable pour tout x de l'intervalle $[-110\ ;\ 110]$, d'expression :

$$F(x) = \frac{100}{3}\left(e^{0,03x} - e^{-0,03x}\right).$$

Montrer que F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[-110\ ;\ 110]$.

2. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
Déterminer l'aire, exprimée en m^2, de la surface exposée à l'action du vent.

Annexe (exercice 2) à rendre avec la copie

Nombre de tickets :

	avec un soleil	avec une lune	Total
avec un cœur			
avec un pique	990		
Total			