∾ Baccalauréat STI France 23 juin 2009 ∾
Génie des matériaux, mécanique B, C, D, E

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 **5 points**

Le plan est muni d'un repère orthogonal $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. Résoudre l'équation différentielle

$$4y'' + y = 0, \qquad \text{(E)}$$

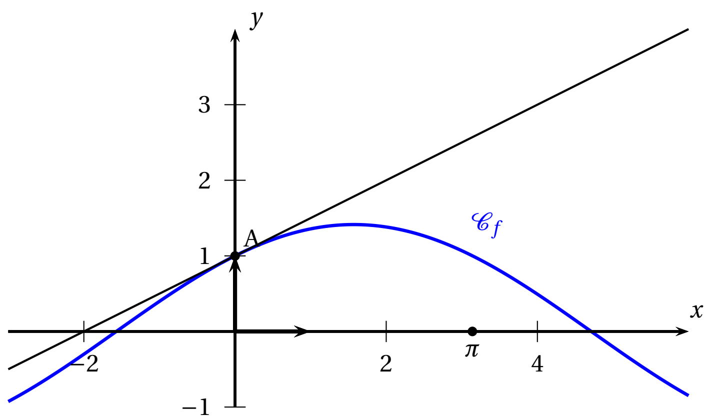
où y désigne une fonction de la variable réelle x définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et ou y'' désigne sa dérivée seconde.

2. Le but de cette question est de trouver la solution particulière de (E), appelée f, dont la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est fournie en annexe. On note f' la fonction dérivée de f.
   a. La courbe $\mathscr{C}_f$ passe par le point $A(0; 1)$ et admet en ce point une tangente de coefficient directeur $\frac{1}{2}$. En déduire les valeurs de $f(0)$ et $f'(0)$.
   b. Montrer que la solution particulière f de l'équation (E) est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right) + \sin\left(\frac{x}{2}\right).$$

3. Soit D le domaine du plan délimité par :
   — l'axe des abscisses ;
   — l'axe des ordonnées ;
   — la droite d'équation $x = \pi$,
   — la courbe $\mathscr{C}_f$.
   Hachurer le domaine D sur la feuille annexe.
4. Montrer que $[f(x)]^2 = 1 + \sin(x)$.
5. On considère le solide de révolution engendré par la rotation du domaine D autour de l'axe des abscisses.
   Calculer la valeur exacte, en unité de volume, du volume V de ce solide.
   On rappelle que $V = \pi \displaystyle\int_0^{\pi} [f(x)]^2 \, \mathrm{d}x$.

Annexe de l'exercice 1 à rendre avec la copie



EXERCICE 2 **5 points**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}\,;\, \vec{u},\, \vec{v}\right)$.
On désigne par i le complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation :

$$(z+4)\left(z^2-4z+16\right)=0.$$

2. On considère les nombres complexes définis par :

$$z_A=2+2\text{i}\sqrt{3} \qquad z_B=2-2\text{i}\sqrt{3} \qquad z_c=-4.$$

Calculer le module et un argument de z_A.
En prenant comme unité graphique 1 cm, placer dans le plan complexe (en utilisant une feuille de papier millimétré) le point A d'affixe z_A, le point B d'affixe z_B et le point C d'affixe z_C.

3. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

a. Démontrer que les points A, B, C appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

b. Placer le point D milieu du segment $[AC]$.

c. Déterminer la nature du triangle BDA.

PROBLÈME **10 points**

Soit la fonction f, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, d'expression

$$f(x)=\text{e}^x-\frac{5}{2}+\frac{1}{\text{e}^x}.$$

On note f' sa fonction dérivée.
Soit $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.

1. Étudier les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

2. a. Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)$ peut se mettre sous la forme :

$$f'(x) = \frac{\left(\mathrm{e}^x - 1\right)\left(\mathrm{e}^x + 1\right)}{\mathrm{e}^x}.$$

b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.

c. Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

3. a. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2X^2 - 5X + 2 = 0$ d'inconnue X.

b. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ équivaut à $2\left(\mathrm{e}^x\right)^2 - 5\mathrm{e}^x + 2 = 0$.

c. En utilisant la question a., résoudre l'équation $2\left(\mathrm{e}^x\right)^2 - 5\mathrm{e}^x + 2 = 0$.

d. Quelles sont les abscisses des points d'intersection de la courbe $\mathcal{C}_f$ avec l'axe des abscisses ?

e. En utilisant les résultats des questions 2. c. et 3. d. déterminer le signe de $f(x)$sur $\mathbb{R}$.

4. Déterminer une équation de la droite $\mathcal{T}$ tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $\ln(2)$.

5. En utilisant une feuille de papier millimétré, tracer dans le repère $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ la courbe $\mathcal{C}_f$ et la droite $\mathcal{T}$: unités graphiques 4 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées.

6. Soit la fonction F, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, d'expression $F(x) = \mathrm{e}^x - \dfrac{5}{2}x - \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$.

a. Montrer que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

b. En déduire la valeur exacte de l'intégrale

$$I = \int_{\ln(2)}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

c. Hachurer sur le graphique la partie du plan dont l'intégrale I donne la valeur de l'aire A en unité d'aire.

d. Déduire des questions précédentes la valeur exacte de l'aire A de la partie hachurée, exprimée en cm². On donnera ensuite une valeur approchée de A à $0,1$ cm² près.