Baccalauréat STI Métropole juin 2002
Génie mécanique, génie des matériaux

EXERCICE 1 **5 points**

Soit f la fonction numérique définie, pour tout nombre réel x, par :

$$f(x) = 4x^3 - 8x^2 - x + 2.$$

1. **a.** Montrer que 2 est une solution de l'équation $f(x) = 0$.
   b. Déterminer trois réels a, b et c tels que pour tout x de $\mathbb{R}$:

$$f(x) = (x-2)\left(ax^2 + bx + c\right).$$

   c. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$.
2. En utilisant les résultats de la question 1., résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes
   a. $4\ln^3 x - 8\ln^2 x - \ln x + 2 = 0$;
   b. $4\text{e}^{2x} - 8\text{e}^{x} - 1 + \dfrac{2}{\text{e}^{x}} = 0$.

EXERCICE 2 **5 points**

i désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.
On considère les trois nombres complexes :

$$z_1 = 2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + \text{i}\sin\frac{\pi}{6}\right) \quad ; \quad z_2 = 4 \quad ; \quad z_3 = 2\left(1 + 4\text{e}^{4\text{i}\frac{\pi}{3}}\right).$$

On appelle M_1, M_2 et M_3 leurs images respectives dans le plan complexe $\mathscr{P}$ rapporté au repère orthonormal $\left(\text{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$ (unité graphique : 1 cm).

1. Calculer la partie réelle et la partie imaginaire de z_1 et de z_3.
2. Placer les points M_1, M_2 et M_3 et dans le plan $\mathscr{P}$.
3. **a.** Calculer sous forme trigonométrique les nombres complexes :

$$z_1 - 2 \quad ; \quad z_2 - 2 \quad ; \quad z_3 - 2.$$

   b. En déduire que les trois points M_1, M_2 et M_3 sont situés sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.
4. Montrer que le triangle $\text{M}_1\text{M}_2\text{M}_3$ est rectangle.

PROBLÈME **10 points**

Le but de ce problème est l'étude de la conception, des caractéristiques et de la commercialisation d'une bobine de fil.

Partie A - Détermination d'une fonction f nécessaire à la conception d'une bobine

Soit f la fonction numérique définie, pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\,;\,4]$, par

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$(unité graphique : 1 cm).
On impose les conditions suivantes

- $f(0) = 2$;
- $f(2) = 1$;
- La courbe $\mathscr{C}$ admet en son point d'abscisse 2 une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

1. Calculer a, b et c pour que les trois conditions précédentes soient remplies et en déduire que pour tout x de l'intervalle $[0~;~4]$, $f(x) = \dfrac{1}{4}x^2 - x + 2$.

2. Montrer que la fonction admet sur $[0\,;\,4]$ un minimum que l'on précisera.

3. Construire la courbe $\mathscr{C}$ dans le repère $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.

Partie B - Conception et étude des caractéristiques de la bobine

Soit Δ la partie du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}$ l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 4$.
La rotation de la partie Δ autour de l'axe des abscisses engendre un solide (B).
Ce solide est la bobine ci-dessous dessinée, à gauche (fig. 1)

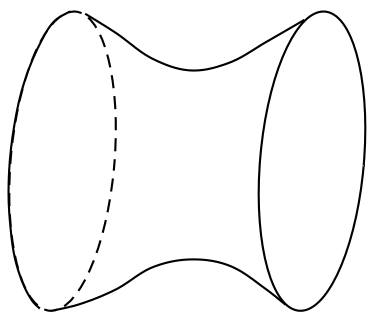

fig. 1 : bobine sans fil

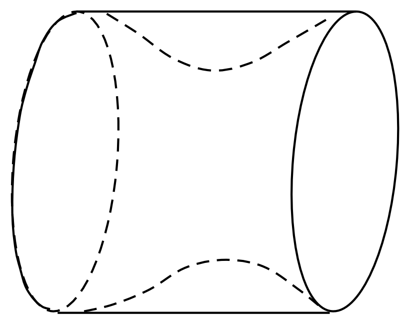

fig. 2 : bobine avec fil

1. **a.** Hachurer la partie Δ sur le graphique.

b. Vérifier que, pour tout x de $\mathbb{R}$:

$$[f(x)]^2 = \frac{1}{16}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + 2x^2 - 4x + 4.$$

c. En déduire la valeur exacte en cm^3 du volume V_1 de la bobine sans fil. (On rappelle que :

$$\text{V}_1 = \pi \int_0^4 [f(x)]^2\,\text{d}x.$$

2. Lorsque le fil est placé sur la bobine, l'ensemble « bobine avec fil » est assimilé à un cylindre (voir fig. 2).

a. Calculer la valeur exacte, en cm^3, du volume V_2 de ce cylindre.

b. En déduire la valeur exacte, en cm^3 du volume V occupé par le fil sur la bobine.

3. Le fabricant affirme que la bobine ainsi constituée contient 200 m de fil cylindrique de diamètre 0,4 mm.
Cette affirmation est-elle vraie ou fausse ?

Partie C - Commercialisation des bobines

À l'issue de la fabrication, une bobine de fil peut présenter 0, 1, 2 ou 3 défauts ;

- 90 % des bobines de fil ont 0 défaut ;
- 5 % des bobines de fil ont 1 défaut ;
- 3 % des bobines de fil ont 2 défauts ;
- 2 % des bobines de fil ont 3 défauts.

1. On choisit au hasard une bobine de fil. Calculer la probabilité qu'elle présente au plus un défaut.
2. Soit X la variable aléatoire qui, à chaque bobine de fil choisie au hasard, associe le nombre de ses défauts.
   a. Définir à l'aide d'un tableau, la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
   b. Calculer l'espérance mathématique $\mathrm{E}(X)$ et donner une valeur approchée à 10^{-2} près de l'écart type $\sigma(X)$ de la variable aléatoire X.
3. Le prix de vente d'une bobine de fil dépend du nombre de défauts qu'elle présente comme l'indique le tableau suivant :

Nombre de défauts	0	1	2	3
Prix (en euros)	5	3	2	1

   Soit Y la variable aléatoire qui à chaque bobine de fil choisie au hasard associe son prix,
   a. Définir la loi de probabilité de la variable aléatoire Y.
   b. Calculer l'espérance mathématique $\mathrm{E}(Y)$ de Y. Que représente $\mathrm{E}(Y)$?