∽ Baccalauréat STI Métropole juin 2006 ∾
Génie des matériaux, mécanique B, C, D, E

EXERCICE 1 **5 points**

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation

$$(z-4)\left(z^2+4z+16\right)=0.$$

2. Soient les nombres complexes suivants :

$$z_1=4 \qquad z_2=-2-2\mathrm{i}\sqrt{3} \qquad z_3=-2+2\mathrm{i}\sqrt{3} \qquad z_4=8\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} \qquad z_5=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$$

a. Donner le module et un argument de chacun des nombres complexes z_1, z_2, z_3.

b. Donner les formes algébriques de z_4 et de z_5.

3. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$ d'unité graphique 1 cm. Soient les points A, B, C, D et E d'affixes respectives z_1, z_2, z_3, z_4 et z_5.

a. Placer les points A , B , C , D et E dans le repère indiqué.

b. Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ? Justifier la réponse.

EXERCICE 2 **5 points**

On considère l'équation différentielle (E) suivante :

$$\pi^2 y+9y''=0,$$

où y est une fonction de la variable réelle x et y'' sa dérivée seconde.

1. Soit g la fonction numérique définie pour tout nombre réel x par :

$$g(x)=2\cos\left(\frac{\pi}{3}x\right)+4\sin\left(\frac{\pi}{3}x\right).$$

Vérifier que la fonction g est une solution de l'équation différentielle (E).

2. a. Donner la forme générale des solutions de l'équation différentielle (E).

b. Déterminer la solution particulière f de l'équation différentielle (E) qui vérifie :

$$f(0)=1 \quad \text{et} \quad f'(0)=\frac{\pi}{3}.$$

c. Montrer que, pour tout nombre réel x, $f(x)$ peut s'écrire sous la forme

$$f(x)=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{3}x-\frac{\pi}{4}\right).$$

d. Résoudre dans l'intervalle $[0\,;\,3]$ l'équation $f(x)=1$.

PROBLÈME **10 points**

Partie A

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels l'équation $2X^2-5X+2=0$.

2. En déduire les solutions, sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$, de l'équation
$2(\ln x)^2 - 5\ln x + 2 = 0$.
On pourra poser $X = \ln x$.

Partie B

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = 2(\ln x)^2 - 5\ln x + 2.$$

Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni du repère orthonormal $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 1 cm.

1. Limites aux bornes

a. Étudier la limite de f en 0. Quelle conséquence graphique peut-on en tirer ?

b. Déterminer la limite de f en $+\infty$ (on pourra factoriser par $\ln x$).

2. Variations

a. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.
Vérifier que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0~;~+\infty[$,
$f'(x) = \dfrac{4\ln x - 5}{x}$.

b. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

c. En déduire le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$. On pourra remarquer que la fonction f s'annule en $\sqrt{\text{e}}$ et en e^2.

3. Donner une équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse $\sqrt{\text{e}}$.

4. Tracer la courbe $\mathcal{C}$ et la tangente T dans le repère orthonormal $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.

5. Calcul d'une aire

a. Hachurer le domaine $\mathcal{A}$ du plan situé en dessous de l'axe (Ox) et compris entre la courbe $\mathcal{C}$ et l'axe (Ox).

b. Vérifier que la fonction F définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par
$F(x) = x\left[2(\ln x)^2 - 9\ln x + 11\right]$ est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

c. Calculer en cm^2 l'aire du domaine $\mathcal{A}$. En donner l'arrondi à 10^{-2}.