∽ Baccalauréat STI Métropole 18 juin 2008 Métropole ∾
Génie des matériaux, mécanique B, C, D, E

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 **5 points**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation $z^2 - 2z + 4 = 0$.

2. On considère les points A, B et C d'affixes respectives

$$z_{\text{A}} = 1 - \text{i}\sqrt{3},\quad z_{\text{B}} = 2 \text{ et } z_{\text{C}} = \overline{z_{\text{A}}}.$$

a. Déterminer le module et un argument de z_{A}, de z_{B} et de z_{C}.

b. Placer les points A, B et C dans le repère $\left(\text{O}~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$ (on laissera apparents les traits de construction).

c. Montrer que A, B et C sont sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

3. Soit z_{D} le nombre complexe : $z_{\text{D}} = 2\text{e}^{\text{i}\frac{2\pi}{3}}$.

a. Placer le point D d'affixe z_{D} sur le graphique précédent.

b. Calculer $z_{\text{D}} - z_{\text{A}}$ et $z_{\text{C}} - z_{\text{B}}$ sous forme algébrique. En déduire que ABCD est un trapèze.

c. Calculer les distances AB et CD. Que peut-on en conclure pour le trapèze ABCD ?

EXERCICE 2 **5 points**

Onze chansons différentes sont enregistrées sur un CD. La durée de chacune d'elles étant inscrite sur la pochette du CD, on a le tableau suivant :

Numéro de la chanson	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Durée en secondes	200	185	150	200	185	215	230	215	200	230	300

Un lecteur de CD sélectionne *au hasard* une des onze chansons et une seule ; toutes les chansons ont la même probabilité d'être sélectionnées.
Les résultats seront donnés sous forme de fractions.

1. Quelle est la probabilité que la chanson n° 7 soit sélectionnée ?

2. a. Déterminer la probabilité de l'évènement A : « la chanson sélectionnée a une durée de 200 secondes ».

b. Déterminer la probabilité de l'évènement B : « la chanson sélectionnée a une durée supérieure à 210 secondes ».

c. Soit $\overline{B}$ l'évènement contraire de B. Décrire $\overline{B}$ø par une phrase, puis déterminer sa probabilité.

3. On note X la variable aléatoire qui à chaque chanson sélectionnée associe sa durée exprimée en secondes

a. Déterminer les différentes valeurs prises par X.

b. Établir sous forme d'un tableau la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

c. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X. Interpréter ce résultat.

PROBLÈME **10 points**

Partie A - Exploitation d'un graphique

On considère la fonction g définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, dont la représentation graphique $\mathcal{C}_g$ est donnée sur la figure en annexe. On précise que la courbe $\mathcal{C}_g$ coupe l'axe des abscisses au seul point d'abscisse 0 et admet en ce point comme tangente la droite d tracée sur la figure en annexe.
Soit g' la fonction dérivée de g sur $\mathbb{R}$.

1. En prenant appui sur la représentation graphique donnée en annexe :

a. Indiquer à quel entier est égal $g(0)$.

b. Expliquer pourquoi $g'(0) = 2$.

c. Préciser sur quel intervalle la fonction g semble être positive.

2. On admet maintenant que $g(x) = ax + b + \mathrm{e}^x$ où a et b sont des réels que l'on va déterminer.

a. Déterminer b en utilisant la question **1. a.**.

b. Calculer $g'(x)$ en fonction de a puis déterminer a en utilisant la question **1. b.**.

c. En déduire que pour tout réel x,on a : $g(x) = x - 1 + \mathrm{e}^x$.

Partie B - Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ d'expression :

$$f(x) = x - 4 - x\mathrm{e}^{-x}.$$

Soit $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

1. Vérifier que, pour tout réel x non nul, on a $f(x) = x\left(1 - \dfrac{4}{x} - \mathrm{e}^{-x}\right)$. En déduire $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} f(x)$.

2. a. Calculer $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

b. Démontrer que la droite Δ d'équation $y = x - 4$ est une asymptote oblique à la courbe $\mathcal{C}_1$.

c. Étudier la position relative de la courbe $\mathcal{C}_1$- par rapport à la droite Δ.

3. On note f' la dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

a. Pour tout réel x, calculer $f'(x)$, puis vérifier que : $f'(x) = g(x)\mathrm{e}^{-x}$, où g est la fonction obtenue dans la partie A (question 2. c.).

b. En utilisant la question 1. c. de la partie A, déterminer le signe de $f'(x)$.

c. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

4. En prenant pour unité graphique 1 cm sur chaque axe, tracer sur une feuille de papier millimétré la courbe $\mathcal{C}_f$ et l'asymptote Δ dans le plan muni du repère $\left(\mathrm{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

Partie C - Calcul d'une aire

1. Soit h la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ d'expression :

$$h(x) = -x\mathrm{e}^{-x}$$

a. Soit H la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ d'expression :

$$H(x) = (x+1)\mathrm{e}^{-x}.$$

Montrer que H est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction h.

b. En déduire une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie dans la partie B.

2. **a.** Hachurer sur le graphique le domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 2$.

b. Calculer l'aire $\mathscr{A}$ de la partie hachurée. Donner la valeur exacte de $\mathscr{A}$ en cm^2 puis sa valeur arrondie au centième.

ANNEXE