Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat STI Métropole juin 2010 ∾
Génie mécanique, génie des matériaux

Le candidat est invité à faire figurer sur sa copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé aux candidats que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 **4 points**

Le plan est muni d'un repère orthogonal $\left(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. On considère l'équation différentielle (E) suivante :

$$4y'' = -y$$

où y désigne une fonction de la variable réelle x définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et où y'' désigne sa dérivée seconde.

1. Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right).$$

Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$, puis vérifier que la fonction f est une solution de l'équation différentielle (E).

2. **a.** Donner la forme générale des solutions de l'équation différentielle (E).
   b. Déterminer la solution particulière g de l'équation différentielle (E) dont la courbe représentative passe par les points $A(0 ; 1)$ et $B\left(\pi ; -\sqrt{3}\right)$.
   c. Montrer que, pour tout nombre réel x, on a : $g(x) = f(x)$.

EXERCICE 2 **6 points**

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(O ; \vec{u}, \vec{v}\right)$.
On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$;

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des complexes l'équation :

$$(z-2)\left(z^2 - 2z + 4\right) = 0.$$

2. On considère les points A, B, C, D, E d'affixes respectives :

$$z_A = 2 \ ; \ z_B = 1 + i\sqrt{3} \ ; \ z_C = \overline{z_B} \ ; \ z_D = 2e^{2i\frac{\pi}{3}} \ ; \ z_E = 2ie^{-i\frac{\pi}{3}}.$$

   a. Donner le module et un argument de chacun des nombres complexes z_A et z_B.
   b. Donner le module et un argument de z_C.
   c. Donner sans calcul le module et un argument de z_D

d. Déterminer la forme algébrique de z_D et z_E.

3. **a.** Placer les points A, B, C, D, E dans le repère indiqué sur la feuille de papier millimétré fournie.
On prendra comme unité graphique 2 cm sur chacun des axes.

Dans les questions suivantes, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

b. Montrer que les points A, B, C, D, E sont situés sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

c. Tracer le cercle dans le repère.

d. Quelle est la nature du triangle DBC ?

PROBLÈME **10 points**

Soit la fonction f, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, d'expression

$$f(x) = 6 - x - \mathrm{e}^{-x}.$$

Soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.

1. **a.** Étudier la limite de f en $+\infty$.

b. Montrer que $f(x)$ peut se mettre sous la forme $f(x) = \mathrm{e}^{-x}\left(6\mathrm{e}^{x} - x\mathrm{e}^{x} - 1\right)$. On admet que $\lim\limits_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^{x} = 0$. En déduire la limite de f en $-\infty$.

2. **a.** Démontrer que la droite Δ d'équation $y = -x+6$ est une asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$.

b. Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à la droite Δ.

3. On note f' la fonction dérivée de f sur R.

a. Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)$ peut se mettre sous la forme
$f'(x) = \dfrac{1-\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{x}}$.

b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $1 - \mathrm{e}^{x} \geqslant 0$.

c. En déduire le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$ et dresser le tableau de variations de f.

4. Soit Δ' la parallèle à Δ passant par l'origine.
Calculer les coordonnées du point d'intersection N de Δ' et de $\mathscr{C}_f$.

5. Déterminer une équation de la droite $\mathscr{T}$ tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $-\ln(6)$.

6. En utilisant une feuille de papier millimétré, tracer dans le repère $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ la courbe $\mathscr{C}_f$ et les droites Δ, Δ' et $\mathscr{T}$. On prendra comme unité graphique 1 cm sur chacun des axes.

7. Soit la fonction F, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, d'expression

$$F(x) = 6x - \frac{x^2}{2} + \mathrm{e}^{-x}.$$

a. Montrer que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

b. Hachurer sur le graphique le domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses, la droite d'équation $x = -\ln(6)$ et l'axe des ordonnées.

c. Calculer l'aire $\mathscr{A}$ en cm^2 de la partie hachurée.
On donnera la valeur exacte, puis la valeur arrondie de $\mathscr{A}$ au dixième de cm^2.