∽ Baccalauréat STI Métropole septembre 2002 ∽
Génie mécanique B, C, D, E, des matériaux

EXERCICE 1 **5 points**

On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.
On considère les deux nombres complexes :

$$z_1 = 2\sqrt{3} + 2\text{i} \text{ et } z_2 = 2\sqrt{2} - 2\text{i}\sqrt{2}.$$

1. Donner le module et un argument des deux nombres complexes z_1 et z_2. En déduire le module et un argument de $\frac{z_1}{z_2}$.
2. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$, d'unité graphique 1 cm. Utiliser les résultats obtenus dans la question 1, pour placer les points A et B d'affixes respectives z_1 et z_2 en faisant apparaître les traits de construction.
3. Vérifier que $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} + \text{i}\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$. En comparant les formes algébrique et trigonométrique de $\frac{z_1}{z_2}$ donner les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et de $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$
4. Soit C le point d'affixe $z_3 = 4\frac{z_1}{z_2}$. Placer le point C sur la figure faite à la question 1.
5. Montrer que les trois points A, B et C sont situés sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

EXERCICE 2 **4 points**

On considère l'équation différentielle

$$4y'' + 9y = 0 \quad \text{(E)}$$

où y désigne une fonction numérique de la variable réelle x, deux fois dérivable, et y'' sa fonction dérivée seconde.

1. Soit g la fonction numérique définie, pour tout nombre réel x, par : $g(x) = 2\cos\left(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{6}\right)$.

   Vérifier que g est une solution particulière de (E).
2. Résoudre l'équation différentielle (E).
3. Déterminer la solution particulière f de (E) telle que : $f(\pi) = 1$ et
   $f'\left(\frac{5\pi}{9}\right) = 0$, f' désignant la fonction dérivée de f.
4. Montrer que $f = g$.

PROBLÈME **11 points**

Le but du problème est de déterminer la valeur exacte de l'aire de la région grisée sur la figure en annexe. Cette région est limitée par l'axe des ordonnées et deux morceaux de courbes symétriques par rapport à l'axe des abscisses.
Les parties A et B peuvent être traitées de manière indépendante.

On considère la fonction f définie, pour tout nombre réel x, par

$$f(x) = \frac{4 - \text{e}^x}{1 + \text{e}^x}.$$

Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le plan rapporte à un repère orthonormal $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$, d'unité graphique 2 cm. La courbe $\mathscr{C}$ est représentée sur la figure en annexe.

Partie A : étude de la fonction f

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$. Que peut-on en déduire graphiquement pour $\mathscr{C}$?
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$. (On pourra vérifier que, pour tout nombre réel x, on a $f(x) = \dfrac{4\text{e}^{-x}-1}{\text{e}^{-x}+1}$. Que peut-on déduire graphiquement pour $\mathscr{C}$?
3. Déterminer, pour tout nombre réel x, $f'(x)$ où f' désigne la fonction dérivée de f. étudier le signe de f'. En déduire le tableau de variations de f sur l'ensemble des nombres réels ,
4. **a.** Déterminer les coordonnées du point d'intersection A de $\mathscr{C}$ avec l'axe des ordonnées.

   b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $4-\text{e}^{x}=0$. En déduire que $\mathscr{C}$ coupe l'axe des abscisses en un point B dont on déterminera les coordonnées.
5. Montrer que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\,;\,2\ln 2]$, on a $f(x) \geqslant 0$.
6. Placer les points A et B, puis tracer les droites asymptotes de $\mathscr{C}$ sur la figure en annexe à joindre à la copie.

Partie B : calcul de l'aire de la région grisée

1. Montrer que la fonction numérique F définie, pour tout nombre réel x, par $F(x) = 4x-5\ln\left(\text{e}^{x}+1\right)$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer la valeur exacte, en unités d'aires, de l'aire de la région du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}$, les deux axes du repère et la droite d'équation $x = 2\ln 2$.

   En déduire la valeur exacte, en cm^2, de l'aire de la région grisée, puis sa valeur arrondie au mm^2 près.

Annexe à rendre avec la copie