Durée : 4 heures

∽ STI Génie mécanique, génie des matériaux septembre 2003 ∽ Métropole

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

EXERCICE 1 **5 points**

Partie A

Le plan complexe $\mathscr{P}$ est rapporté au repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$ (unité graphique : 2 cm). On considère les points E, F et G d'affixes respectives :

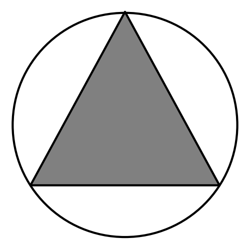
$$z_{\mathrm{E}} = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3} \quad ; \quad z_{\mathrm{F}} = 2z_{\mathrm{E}} \quad ; \quad z_{\mathrm{G}} = 3 + \mathrm{i}\sqrt{3}.$$

1. Écrire z_{E}, z_{F} et z_{G} sous forme trigonométrique.
2. Placer les points E, F et G dans $\mathscr{P}$.
3. Montrer que le triangle EFG est équilatéral. Le tracer.
4. Montrer que le point I $\left(2\,;\,\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\right)$ est le centre du cercle $\mathscr{C}$ circonscrit au triangle EFG. Tracer $\mathscr{C}$.

Partie B

On considère que le disque déterminé par $\mathscr{C}$ forme une cible décomposée en deux zones :
- une zone triangulaire noire nommée N.
- une zone blanche nommée B.

On suppose que la probabilité, pour un tireur, d'atteindre N est $0,5$ et celle de rater la cible est $0,2$.



Cible

1. **a.** Quelle est la probabilité d'atteindre la cible ?
   b. Quelle est la probabilité d'atteindre B ?
2. On considère un tireur qui tire sur la cible.
   — S'il atteint B, il gagne 5 euros.
   — S'il atteint N, il gagne 2 euros.
   — S'il rate la cible, il doit payer 8 euros.
   Soit X la variable aléatoire qui à chaque tir associe le gain correspondant (positif ou négatif).
   a. Définir la loi de probabilité de X.
   b. Calculer l'espérance mathématique de X. Le jeu est-il équitable ?
   c. Calculer la valeur arrondie à 10^{-2} près de l'écart type de X.

EXERCICE 2 **5 points**

Par la suite, on désigne par I l'intervalle $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$.
Soit f la fonction définie, pour tout nombre réel x de I, par

$$f(x) = \cos x + \sin x.$$

1. Déterminer la fonction dérivée f' de f puis la fonction dérivée seconde f'' de f.
2. **a.** Montrer que, pour tout nombre réel x de I, $f''(x) < 0$.

   b. En déduire le tableau de variations de f' sur I.

   c. Calculer $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$. En déduire le signe de $f'(x)$ pour x appartenant à I.

   d. En déduire le tableau de variations de f sur I.
3. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ représentant f dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(\text{O}~;~\overrightarrow{u},~\overrightarrow{v}\right)$. (Unités 4 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur celui des ordonnées).
4. **a.** Montrer que, pour tout nombre réel x de I,

$$[f(x)]^2 = 1 + \sin 2x.$$

   b. En déduire une primitive sur I de la fonction qui, à tout nombre réel x de I, associe $[f(x)]^2$.
5. Soit V le volume du solide engendré par la rotation de $\mathscr{C}$ autour de l'axe des abscisses.
   Calculer V en unités de volume.
   (On rappelle que $\text{V} = \pi \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x)]^2\,\text{d}x$).

PROBLÈME **10 points**

Partie A

1. Étudier, en fonction du nombre réel x, le signe de $x^2 - 1$.
2. Étudier, en fonction du nombre réel x, le signe de $\text{e}^x - 6$.
3. Déduire des questions précédentes, en fonction du nombre réel x, le signe de $(x^2 - 1)\,(\text{e}^x - 6)$.

Partie B

On considère les fonctions g et f définies, pour tout nombre réel x, par :

$$g(x) = -2x^3 + 6x \quad \text{et} \quad f(x) = (x-1)^2\text{e}^x + g(x).$$

1. **a.** Calculer la limite de g en $-\infty$.

   b. Calculer la limite de f en $-\infty$. (On rappelle que $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} x^2\text{e}^x = 0\Big)$.
2. **a.** Montrer que, pour tout nombre réel x non nul,

$$f(x) = x\text{e}^x\left(x - 2 + \frac{1}{x} - 2\frac{x^2}{\text{e}^x} + \frac{6}{\text{e}^x}\right).$$

   b. En déduire la limite de f en $+\infty$.
3. Montrer que, pour tout nombre réel x,

$$f'(x) = (x^2 - 1)\left(\text{e}^x - 6\right).$$

4. Déduire de la troisième question de la **partie A** le tableau de variations de f.
5. Soient $\mathscr{C}$ et Γ les courbes représentant respectivement f et g dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(\text{O}~;~\overrightarrow{\imath},~\overrightarrow{\jmath}\right)$, (Unités : 2 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur celui des ordonnées).

   a. Calculer la limite de $f - g$ en $-\infty$,

   b. En déduire que $\mathscr{C}$ et Γ sont asymptotes.

c. Étudier les positions relatives de $\mathscr{C}$ et Γ et préciser les coordonnées du point E commun à $\mathscr{C}$ et Γ.

6. La courbe Γ est tracée sur la feuille annexe que l'on rendra avec la copie. Compléter ce dessin en traçant $\mathscr{C}$ ainsi que les tangentes à $\mathscr{C}$ aux trois points d'abscisses $-1,\ 1$ et $\ln 6$.

Partie C

1. Déterminer les réels $a,\ b$ et c tels que la fonction H définie, pour tout nombre réel x, par

$$H(x) = \left(ax^2 + bx + c\right)\mathrm{e}^x$$

soit une primitive de la fonction qui, à tout nombre réel x, associe $\left(x^2 - 2x + 1\right)\mathrm{e}^x$.

2. Soit D, la partie du plan limitée par $\mathscr{C}$, Γ et les droites d'équation $x = -1$ et $x = 1$.
Colorier D puis calculer les valeurs exactes de l'aire de D en unités d'aire et en cm^2.

Figure annexée au sujet, à compléter et à rendre avec la copie