∽ Baccalauréat STI Métropole septembre 2010 ∾
Génie mécanique, des matériaux

EXERCICE 1 **6 points**

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(O ; \vec{u}, \vec{v}\right)$.

1. **a.** Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation :

$$z^2 + z + 1 = 0$$

On notera z_1 et z_2 les solutions de cette équation, z_1 étant celle dont la partie imaginaire est négative.

   b. Montrer que $z_1^2 = z_2$.

2. **a.** On considère dans la suite de l'exercice les points A, B et C d'affixes respectives

$$z_1 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}, \quad z_2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \quad \text{et } z_3 = 1.$$

Écrire chacun de ces trois nombres complexes sous forme trigonométrique et en déduire que $z_1^3 = z_3$.

   b. Calculer z_1^{2010}.

3. **a.** Placer les points A, B et C dans le plan. On prendra 4 cm comme unité graphique sur chacun des axes.

   b. Montrer que ces points sont sur un cercle, dont on déterminera le centre et le rayon.

Dans les questions suivantes, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

4. Montrer que le triangle ABC est équilatéral.
5. Placer le point D tel que le quadrilatère ABCD soit un parallélogramme puis calculer les coordonnées du point D.
6. Expliquer, sans faire de calculs, pourquoi les droites (AC) et (BD) sont perpendiculaires.

EXERCICE 2 **4 points**

Partie A

On considère l'équation différentielle

$$(E_0 :) \quad y'' + 9y = 0$$

où y est une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Résoudre l'équation différentielle (E_0).
2. Déterminer la solution particulière f de l'équation différentielle (E_0) vérifiant les conditions $f(0) = \sqrt{3}$ et $f'(0) = 3$.
3. À l'aide de la formule $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$, montrer que $f(x)$ peut s'écrire :

$$f(x) = 2\cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right).$$

Partie B

On considère maintenant l'équation différentielle

$$(E_1): \quad y'' + 9y = \mathrm{e}^{-x}.$$

1. Montrer que la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{1}{10}\mathrm{e}^{-x}$ est une solution de (E_1).
2. Montrer que la fonction $f + g$ est solution de (E_1).

PROBLÈME **10 points**

Partie A

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par :

$$g(x) = x^2 + 2 - 2\ln(x)$$

1. Déterminer la fonction dérivée g' de la fonction g et montrer que cette dérivée peut s'écrire :
$$g'(x) = \frac{2\left(x^2 - 1\right)}{x}$$
2. Étudier le signe de $g'(x)$ et établir le tableau de variations de la fonction g (les limites de la fonction g en 0 et en $+\infty$ ne sont pas demandées).
3. En déduire le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

Partie B

On considère maintenant la fonction f définie et dérivable sur $]0~;~+\infty[$, d'expression :

$$f(x) = \frac{2\ln(x)}{x} + x - 1$$

Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentant la fonction f dans le repère donné sur l'annexe jointe au sujet.

1. **a.** Calculer $\displaystyle\lim_{x \to 0} f(x)$ et en déduire que la courbe $\mathscr{C}$ représentant la fonction f admet une asymptote dont on déterminera une équation.
   b. Calculer $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x)$.
   c. Justifier que la courbe $\mathscr{C}$ admet la droite Δ d'équation $y = x - 1$ comme asymptote.
   d. Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la droite Δ.
   e. Tracer la droite Δ sur le graphique donné dans l'annexe, à rendre avec la copie.
2. **a.** Calculer la fonction dérivée f' de f et montrer que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.
   b. Déduire de la partie A le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f.
3. **a.** Donner une équation de la tangente $\mathscr{T}$ à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.
   b. Représenter $\mathscr{T}$ sur le graphique joint en annexe, à rendre avec la copie.

Partie C

1. **a.** Calculer la dérivée de la fonction H définie sur $]0~;~+\infty[$ par $H(x) = [\ln(x)]^2$.
   b. En déduire une primitive de la fonction f.
2. Déduire de ce calcul la valeur exacte de l'intégrale suivante : $\displaystyle\int_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x$.
3. Cette intégrale correspond à l'aire calculée en unités d'aire d'une surface. Hachurer cette surface sur le graphique de l'annexe, à rendre avec la copie.

Annexe à rendre avec la copie