Durée : 4 heures

Baccalauréat STI Génie des matériaux Métropole juin 2004

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.
Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.
Le candidat doit traiter les deux exercices et le problème.

EXERCICE 1 **5 points**

1. **a.** Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation :

$$z^2 - 6z + 12 = 0.$$

   b. Écrire les solutions de cette équation sous forme exponentielle.

2. Dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$, placer les points A, B et I d'affixes respectives

$$z_{\text{A}} = 3 + \text{i}\sqrt{3} \qquad z_{\text{B}} = 3 - \text{i}\sqrt{3} \quad \text{et} \quad z_{\text{I}} = 2.$$

   a. Montrer que les points A, B et O sont sur un cercle de centre I dont on précisera le rayon.

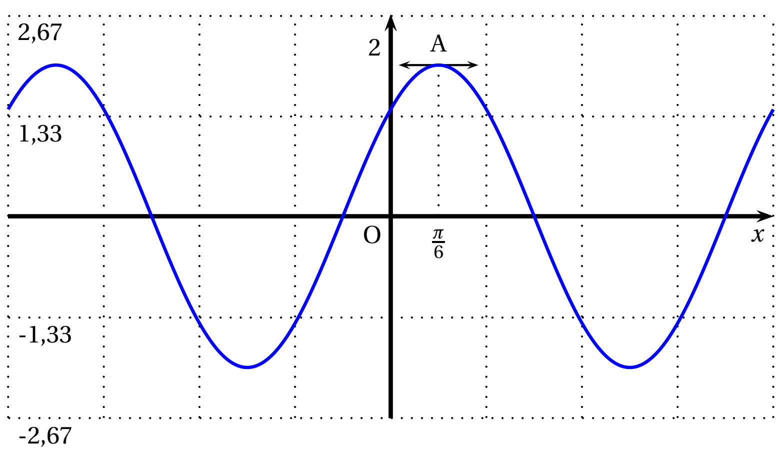
   b. Donner, en le justifiant, la nature du triangle OAB.

   c. Placer le point C d'affixe $z_{\text{C}} = -2\text{i}\sqrt{3}$. Montrer que les points A, C et I sont alignés.

EXERCICE 2 **4 points**

1. Résoudre l'équation différentielle (E) : $4y'' + 9y = 0$.

2. On désigne par f la solution particulière de l'équation différentielle (E) dont la représentation graphique est donnée ci-dessous.



Il est précisé que la courbe admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses au point A de coordonnées $\left(\frac{\pi}{6}\,;\,2\right)$. Déterminer une expression de $f(x)$.

3. Montrer que pour tout nombre réel x : $f(x) = 2\cos\left(\dfrac{3x}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

4. Calculer $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{7\pi}{6}} f(x)\,\mathrm{d}x$. Interpréter graphiquement le résultat.

PROBLÈME **11 points**

Soit f la fonction numérique définie pour tout nombre réel x par

$$f(x) = 2 + (2 - x)\mathrm{e}^{2x}.$$

On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ (unités graphiques 4 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées)

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

2. **a.** Déterminer la limite de f en $-\infty$ (on pourra poser $X = 2x$).

b. En déduire que la courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote Δ dont on donnera une équation.

c. Étudier les positions relatives de $\mathscr{C}$ et Δ.

3. **a.** Montrer que, pour tout nombre réel x, $f'(x) = (3-2x)\mathrm{e}^{2x}$, où f' désigne la fonction dérivée de f.

b. Dresser le tableau de variations de f sur l'intervalle $]-\infty\,;\,+\infty[$.

4. **a.** Donner une équation de la tangente $\mathscr{T}$ à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

b. Tracer Δ, $\mathscr{T}$ puis $\mathscr{C}$.

5. Soit G la fonction numérique définie pour tout nombre réel x par

$$G(x) = -\frac{1}{2}x\mathrm{e}^{2x} + \frac{5}{4}\mathrm{e}^{2x}.$$

Montrer que G est une primitive de la fonction g définie pour tout nombre réel x par $g(x) = (2 - x)\mathrm{e}^{2x}$.

6. **a.** Hachurer la partie $\mathscr{A}$ du plan limitée par $\mathscr{C}$, la droite d'équation $y = 2$ et l'axe des ordonnées.

b. Calculer l'aire de $\mathscr{A}$. En donner la valeur exacte en unités d'aire.
Donner une valeur arrondie de cette aire, en cm^2, à 10^{-2} près.