Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat STI Génie mécanique, civil ∽ Antilles–Guyane 20 juin 2011

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

EXERCICE 1 **5 points**

Dans tout ce qui suit, on désigne par :

- $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs ;
- $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels ;
- $\mathbb{Z}$ l'ensemble des nombres complexes.

EXERCICE 1 **4,5 points**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple. Pour chacune des questions, trois réponses sont proposées dont une seule est exacte. Indiquer sur votre copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. On ne demande aucune justification.
Chaque réponse juste rapporte $0,75$ *point ; une réponse fausse enlève* $0,25 point$ *; une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.*
Si le total des points est négatif, il est ramené à zéro.

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

On considère les nombres complexes $z_1 = 1 - \text{i}\sqrt{3}$ et $z_2 = -\sqrt{3} + \text{i}$ d'images respectives A et B.

		Réponse a	Réponse b	Réponse c
Question 1	Le module de z_1 et un argument de z_1 sont respectivement :	2 et $\dfrac{\pi}{3}$	$\sqrt{2}$ et $-\dfrac{\pi}{3}$	2 et $-\dfrac{\pi}{3}$
Question 2	La forme algébrique de $\dfrac{z_1}{z_2}$ est :	$\dfrac{1-\text{i}\sqrt{3}}{-\sqrt{3}+\text{i}}$	$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}\text{i}$	$-\dfrac{1}{\sqrt{3}}-\sqrt{3}$
Question 3	Un argument de $\dfrac{z_2}{z_1}$ est :	$-\dfrac{5\pi}{6}$	$\dfrac{5\pi}{6}$	$\dfrac{\pi}{2}$
Question 4	L'ensemble des points M du plan, d'affixe z, tels que $\lvert z - z_1\rvert = 2$ est :	La droite (AB)	Un cercle de centre A	Une demi-droite d'origine A
Question 5	L'ensemble des points M du plan, d'affixe z, tels que : $\arg(z) = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ est :	Une droite	Un cercle de centre O	Une demi-droite privée de son origine.
Question 6	On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z : $z^2 - 4z + 7 = 0$	L'équation n'a pas de solution	Les solutions sont $2-\sqrt{3}$ et $2+\sqrt{3}$	Les solutions sont $2-\text{i}\sqrt{3}$ et $2+\text{i}\sqrt{3}$

EXERCICE 2 **5,5 points**

On désigne par (E) l'équation différentielle :

$$y'' + y = 0$$

où y est une fonction inconnue deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Résoudre l'équation différentielle (E).
2. Déterminer la solution f de (E) vérifiant les conditions $f(0) = \dfrac{1}{2}$ et $f'\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = 0$.
3. Vérifier que pour tout nombre réel x, $f(x) = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$.
   On rappelle que pour tous nombres réels a et b, on a :

   $$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b.$$

4. On considère l' équation $cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) = 0$ d' inconnue réelle x.
   a. Résoudre cette équation dans $\mathbb{R}$.
   b. Préciser les solutions appartenant à l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi]$.
   c. Placer sur le cercle trigonométrique les points dont les affixes ont pour argument une solution de cette équation.

PROBLÈME **10 points**

Partie A

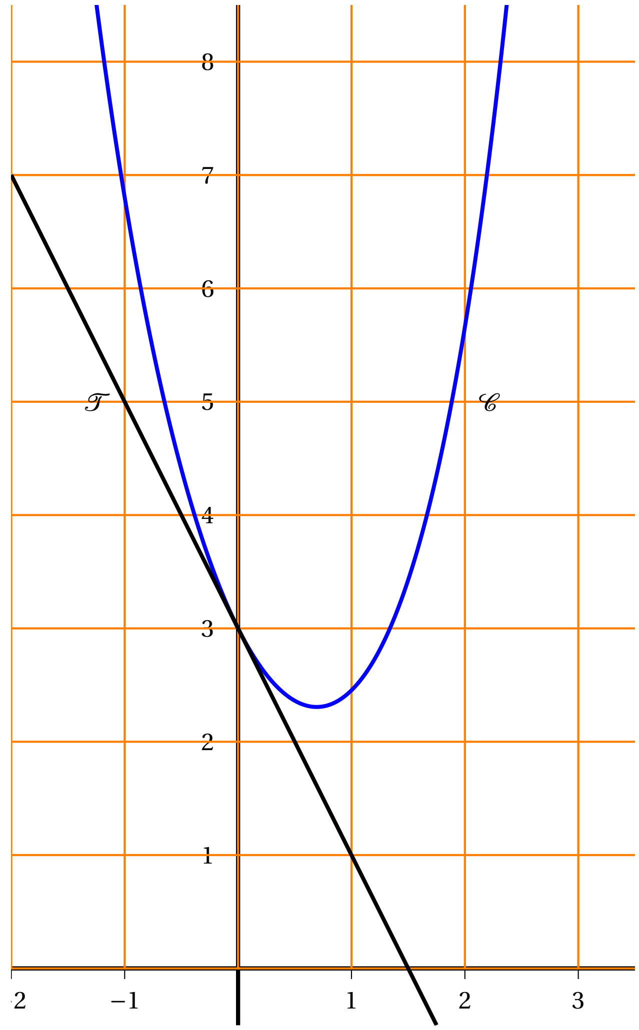
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^x + ax + b\mathrm{e}^{-x}$$

où a et b sont des nombres réels que l'on se propose de déterminer dans cette partie.
Dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, on a représenté ci-dessous la courbe $\mathscr{C}$, représentative de la fonction f, et $\mathscr{T}$ la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

On note f' la fonction dérivée de la fonction f.

1. Par lecture graphique, donner $f(0)$ et $f'(0)$.
2. **a.** Exprimer $f(0)$ en fonction de b.
   b. En déduire la valeur de b.
3. **a.** Donner, pour tout réel x, l'expression de $f'(x)$.
   b. Exprimer $f'(0)$ en fonction de a et b.
   c. En utilisant les questions précédentes, déterminer a, puis en déduire l'expression de $f(x)$.



Partie B

1. Questions préliminaires :

a. Vérifier que pour tout réel x, on a : $e^{2x} - e^x - 2 = (e^x - 2)(e^x + 1)$.

b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation d'inconnue x :

$$e^{2x} - e^x - 2 = 0.$$

On admet que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - x + 2e^{-x}$.

2. Déterminer la limite de f en $-\infty$.

3. a. Vérifier que pour tout réel x non nul, on a : $f(x) = x\left(\dfrac{e^x}{x} - 1 + \dfrac{2}{xe^x}\right)$.

b. En déduire la limite de f en $+\infty$.

c. Calculer la valeur exacte de $f(\ln 2)$ puis en donner une valeur approchée à 10^{-1} près.

4. a. Montrer que pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{e^{2x} - e^x - 2}{e^x}$.

b. Déterminer le signe de f' à l'aide des questions préliminaires.

c. Dresser le tableau de variation de la fonction f.

Partie C

1. Calculer la valeur exacte de $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

2. **a.** Tracer sur la figure en annexe la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = 4$.

b. Hachurer sur la figure en annexe **qui sera à rendre avec la copie**, le domaine $\mathscr{S}$ du plan délimité par la courbe $\mathscr{C}$, la droite $\mathscr{D}$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

c. Calculer, en unités d'aire, la valeur exacte de l'aire du domaine $\mathscr{S}$.

ANNEXE

à rendre avec la copie