Durée : 4 heures

∾ Corrigé du baccalauréat STI mars 2011 ∾
Génie mécanique - Génie énergétique - Génie civil
Nouvelle-Calédonie

EXERCICE 1 **5 points**

1. a. On a $2^3 - 2\left(1+\sqrt{3}\right)2^2 + 4\left(1+\sqrt{3}\right)\times 2 - 8 = 8 - 8 - 8\sqrt{3} + 8 + 8\sqrt{3} - 8 = 0$, ce qui montre que 2 est une solution de l'équation (E).

b. L'équation (E) est du troisième degré ; comme 2 est solution le polynôme du troisième degré est le produit de $z-2$ par un trinôme du second degré dont le terme de degré 2 est z^2 ; il existe donc deux réels α et β tels que l'équation s'écrive :

$(z-2)\left(z^2+\alpha z+\beta\right) = 0.$

En développant cette écriture :

(E) $\iff z^3 + \alpha z^2 + \beta z - 2z^2 - 2\alpha z - 2\beta = 0 \iff z^3 + (\alpha-2)z^2 + (\beta - 2\alpha)z - 2\beta = 0$ et en l'identifiant avec l'énoncé on obtient :

$\left\{\begin{array}{lcl} \alpha - 2 & = & -2-2\sqrt{3}\\ \beta - 2\alpha & = & 4+4\sqrt{3}\\ -2\beta = -8 & & \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} \alpha & = & -2\sqrt{3}\\ \beta - 2\alpha & = & 4+4\sqrt{3}\\ \beta = 4 & & \end{array}\right.$, la seconde égalité étant vraie.

On a donc (E) $(z-2)\left(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4\right) = 0$.

c. Équation du second degré : $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$:

$\Delta = \left(2\sqrt{3}\right)^2 - 4\times 1\times 4 = 12 - 16 = -4 = (2\text{i})^2 < 0.$

Cette équation a donc deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{2\sqrt{3}+2\text{i}}{2} = \sqrt{3}+\text{i} \quad \text{et} \quad z_2 = \sqrt{3}-\text{i}.$$

On a $|z_1|^2 = 3+1 = 4 = 2^2 \Rightarrow |z_1| = 2$.

D'où $z_1 = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \text{i}\dfrac{1}{2}\right)$.

Or $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, donc un argument de z_1 est $\dfrac{\pi}{6}$.

Comme $z_2 = \overline{z_1}$, on a $|z_2| = 2$ et un argument de z_2 est $-\dfrac{\pi}{6}$.

2. a. On place A grâce au cercle de centre O de rayon 2 et de la droite d'équation $y = 1$ qui coupe le cercle en un point d'ordonnée positive A. Voir la figure à la fin.

z_A et z_B ont pour module 2, donc OA = OB = 2 : le triangle OAB est isocèle en O.

b. OAB est isocèle en O et C est le milieu de la base [AB] donc le pied de la hauteur et de la bissectrice issues de O. Comme $\left(\overrightarrow{\text{OB}}\ ;\ \overrightarrow{\text{OA}}\right) = \frac{\pi}{6}$, on a $\left(\overrightarrow{\text{OB}}\ ;\ \overrightarrow{\text{OC}}\right) = \frac{\pi}{12}$.

c. Comme C est le milieu de [AB] :

$c = \dfrac{z_A+z_B}{2} = \dfrac{z_1}{+} z_B 2 = \dfrac{\sqrt{3}+\text{i}+2}{2} = \dfrac{\sqrt{3}+2}{2} + \text{i}\dfrac{1}{2}.$

d. On a $|c|^2 = \left(\dfrac{\sqrt{3}+2}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{3+4+4\sqrt{3}+1}{4} = \dfrac{8+4\sqrt{3}}{4} = 2+\sqrt{3}$, donc

$$|c| = \sqrt{2+\sqrt{3}}.$$

Calculons $\left(\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \dfrac{6+22\sqrt{12}}{4} = \dfrac{8+4\sqrt{3}}{4} = 2+\sqrt{3} = |c|^2$.

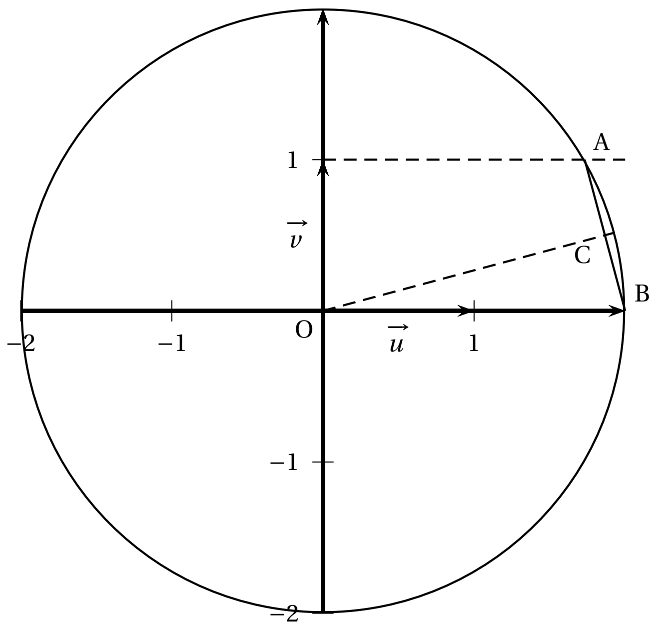
Donc $|c| = \sqrt{2+\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$.

e. Le module c est $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$ et un de ses arguments est $\dfrac{\pi}{12}$; on peut donc écrire :

$c = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}\mathrm{i}\frac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{3}+2}{2}+\mathrm{i}\dfrac{1}{2}$.

Donc en identifiant les parties imaginaires :

$\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{1}{2} \iff \sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{6}-\sqrt{2})} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.



EXERCICE 2 **5 points**

1. a. $I+J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,\mathrm{d}x = [x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \dfrac{\pi}{2}$.

b. $I-J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x\mathrm{d}x = \left[\dfrac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \dfrac{1}{2}\sin\pi - \dfrac{1}{2}\sin 0 = 0-0 = 0$.

c. En ajoutant membres à membres les deux égalités précédentes : $2I = \dfrac{\pi}{2} \iff I = \dfrac{\pi}{4}$ d'où $J = I = \dfrac{\pi}{4}$.

2. a. $f^2(x) = (\cos x+2\sin x)^2 = \cos^2 x+4\sin^2 x+4\sin x\cos x =$
$\cos^2 x+4\sin^2 x+2\sin 2x$.

b. On a donc :

$\mathcal{V} = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} f^2(x)\,\mathrm{d}x = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\cos^2 x + 4\sin^2 x + 2\sin 2x\right]\,\mathrm{d}x =$

$\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,\mathrm{d}x + 4\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,\mathrm{d}x + 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\,\mathrm{d}x =$

$\pi I + 4\pi J + \pi[-\cos 2x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 5\pi I + \pi(1 - \cos\pi) = 5\pi I + 2\pi = \pi(5I + 2) = \pi\left(\frac{5\pi}{4} + 2\right) =$

$\mathcal{V} = \dfrac{\pi(5\pi + 8)}{4}$.

PROBLÈME **10 points**

Partie A : Étude d'une équation différentielle

1. On sait que les solutions de l'équation sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = K\mathrm{e}^x$, $K \in \mathbb{R}$.
2. u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = -\mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x + C\mathrm{e}^x$.
   Donc $u'(x) - u(x) = -\mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x + C\mathrm{e}^x - (-x\mathrm{e}^x + C\mathrm{e}^x) = -\mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x + C\mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x - C\mathrm{e}^x = -\mathrm{e}^x$, ce qui montre que les fonctions u sont solutions de l'équation différentielle (E).
3. $u(x) = -x\mathrm{e}^x + C\mathrm{e}^x$ et $u(0) = 2$ entraîne $-0\mathrm{e}^0 + C\mathrm{e}^0 = 2 \iff C = 2$.
   La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = -x\mathrm{e}^x + 2\mathrm{e}^x = (2 - x)\mathrm{e}^x$ est solution de (E) et vérifie $u(0) = 2$.

Partie B : Étude d'une fonction

1. Étude des limites de la fonction f
   a. On a $\lim\limits_{x \to +\infty} (2 - x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$, donc par produit de limites :
   $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.
   $f(x) = 2\mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x$.
   On a $\lim\limits_{x \to -\infty} 2\mathrm{e}^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x\mathrm{e}^x = 0$, donc par somme de limites $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$.
   b. Le résultat précédent montre que l'axe des abscisses d'équation $y = 0$ est asymptote à $\mathcal{C}$ au voisinage de moins l'infini.
2. Étude des variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$
   a. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :
   $f'(x) = -\mathrm{e}^x + (2 - x)\mathrm{e}^x = (1 - x)\mathrm{e}^x$.
   b. Comme $\mathrm{e}^x > 0$ quel que soit le réel x, le signe de $f'(x)$ est celui de $1 - x$, donc :
   - $1 - x > 0 \iff x < 1$, $f'(x) > 0$: la fonction est croissante sur $]-\infty\ ;\ 1[$;
   - $1 - x < 0 \iff x > 1$, $f'(x) < 0$: la fonction est décroissante sur $]1\ ;\ +\infty[$,

   d'où le tableau de variations :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)$			e		
	0	↗		↘	$-\infty$

3. Tracé de la courbe $\mathcal{C}$

a. On a $M(x\,;\,y) \in T_0 \iff y - f(0) = f'(0)(x - 0)$.
Or $f(0) = 2 \times \mathrm{e}^0 = 2$ et $f'(0) = 1 \times \mathrm{e}^0 = 1$.
Donc $M(x\,;\,y) \in T_0 \iff y - 2 = x \iff y = x + 2$.

b. Intersection avec l'axe des abscisses : il faut résoudre l'équation :
$f(x) = 0 \iff (2 - x)\mathrm{e}^x \iff 2 - x = 0$ (car $\mathrm{e}^x \neq 0$) $\iff x = 2$.
La courbe $\mathscr{C}$ coupe l'axe des abscisses au point $(2\,;\,0)$.
Intersection avec l'axe des ordonnées : $f(0) = (2 - 0)\mathrm{e}^0 = 2$.
La courbe $\mathscr{C}$ coupe l'axe des ordonnées au point $(0\,;\,2)$.

c. Voir à la fin.

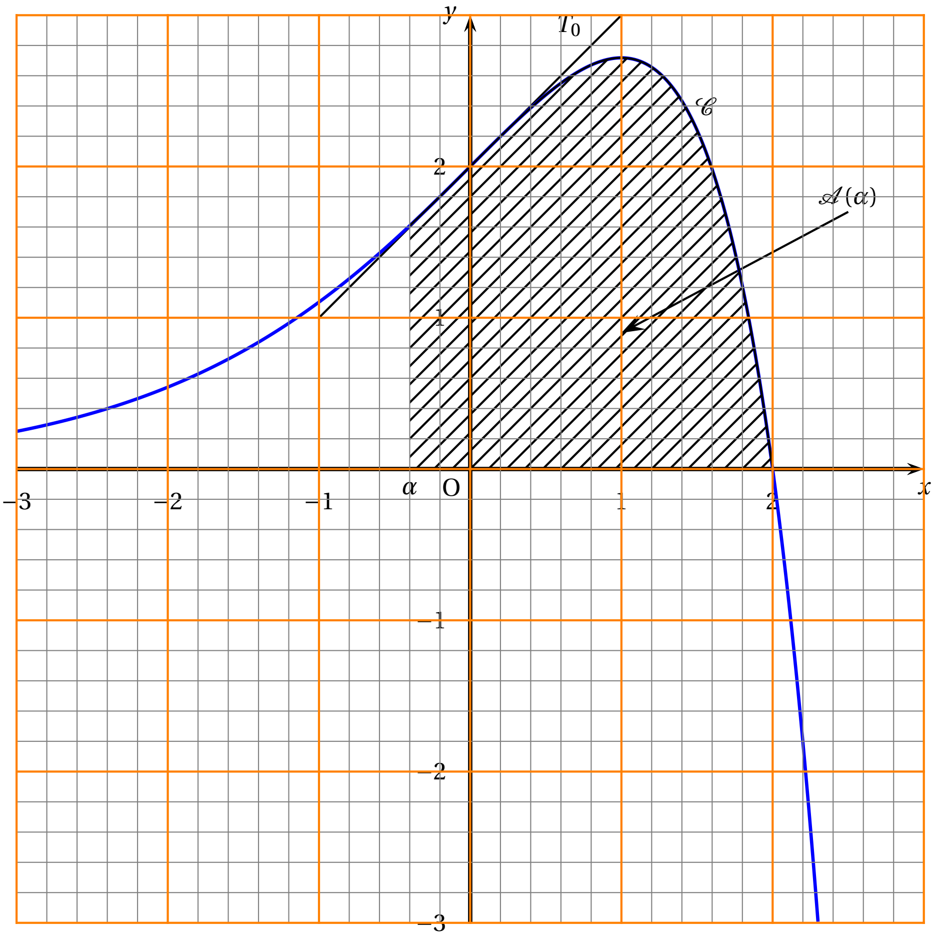
Partie C : Calcul d'une aire plane

1. F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :
$F'(x) = -\mathrm{e}^x + (3 - x)\mathrm{e}^x = (2 - x)\mathrm{e}^x = f(x)$.
Cette égalité montre que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

2. **a.** On a vu que sur $]-\infty\,;\,2[$, $f(x) > 0$, donc l'aire, en unité d'aire $\mathscr{A}(\alpha)$ est égale à :
$\mathscr{A}(\alpha) = \displaystyle\int_\alpha^2 f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_\alpha^2 = F(2) - F(\alpha) = (3-2)\mathrm{e}^2 - \left[(3-\alpha)\mathrm{e}^\alpha\right] =$
$\mathrm{e}^2 - [(3-\alpha)\mathrm{e}^\alpha]$.

b. On a $(3 - \alpha)\mathrm{e}^\alpha = 3\mathrm{e}^\alpha - \alpha\mathrm{e}^\alpha$.
Or $\displaystyle\lim_{\alpha\to-\infty} 3\mathrm{e}^\alpha = 0$ et $\displaystyle\lim_{\alpha\to-\infty} \alpha\mathrm{e}^\alpha = 0$, donc $\displaystyle\lim_{\alpha\to-\infty} \left[(3-\alpha)\mathrm{e}^\alpha\right] = 0$ et finalement :

$$\lim_{\alpha\to-\infty} \mathscr{A}(\alpha) = \mathrm{e}^2.$$



y
T_0
$\mathscr{C}$
$\mathscr{A}(\alpha)$
2
1
−1
−2
−3
−3
−2
−1
α
O
1
2
x