**Durée : 4 heures**

# ∽ Baccalauréat STI Novembre 2011 ∽
# Génie mécanique - Génie énergétique - Génie civil
# Nouvelle-Calédonie

**EXERCICE 1** **5 points**

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $\left(O,\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.

Le nombre i désigne le nombre complexe de module 1 et dont un argument est $\dfrac{\pi}{2}$.

**1.** Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes ; l'équation d'inconnue $z$ (on donnera les solutions sous forme algébrique) :

$$(z-2-2\text{i})\left(\text{i}z+\sqrt{3}-3\text{i}\right)=0.$$

**2.** On note A, B et C les trois points du plan complexe d'affixes respectives :

$$a=3+\sqrt{3}\text{i},\quad b=2+2\text{i}\quad \text{et } c=2\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}.$$

   **a.** Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes $a$ et $b$.

   **b.** Exprimer le nombre complexe $c$ sous forme algébrique.

   **c.** Placer les points A, B et C dans le plan muni du repère $\left(O,\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$. On prendra 2 cm comme unité graphique.

   **d.** Démontrer que le triangle OCA est un triangle isocèle.

**3.** Justifier brièvement le fait que la droite (AC) est parallèle à l'axe des abscisses. En déduire la valeur exacte de l'aire du triangle OCA.

**4.** *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
La droite (OB) est-elle une bissectrice du triangle OCA ?

**EXERCICE 2** **4 points**

Une société commercialise des appareils de deux types A et B. Pour chaque appareil vendu le client a le choix entre deux formules de paiement : immédiat ou fractionné. La société a vendu 200 appareils en 2010. La répartition des appareils vendus, selon le type et la formule de paiement, est détaillée dans le tableau suivant.

| | Type A | Type B | Total |
|---|---|---|---|
| Paiement immédiat | 20 | 30 | 50 |
| Paiement fractionné | 50 | 100 | 150 |
| Total | 70 | 130 | 200 |

**1.** Pour fidéliser sa clientèle, la société envisage de récompenser par un chèque cadeau l'un de ses clients ayant acheté en 2010 un appareil de type A ou B. Pour cela, elle réalise un tirage aléatoire parmi les fiches des 200 appareils vendus. Le client correspondant sera récompensé. Pour cette expérience aléatoire, on note :

— $A$ l'évènement « la fiche tirée correspond à la vente d'un appareil du type A » ;

— $B$ l'évènement « la fiche tirée correspond à la vente d'un appareil du type B » ;

— $I$ l'évènement « la fiche tirée correspond à la vente d'un appareil avec paiement immédiat » ;
— $F$ l'évènement « la fiche tirée correspond à la vente d'un appareil avec paiement fractionné ».

**a.** Déterminer la probabilité des évènements $A$ et $I$.

**b.** Calculer la probabilité que la fiche tirée corresponde à la vente d'un appareil du type A et à un paiement fractionné.

**c.** Calculer la probabilité que la fiche tirée corresponde à la vente d'un appareil du type A ou à un paiement fractionné.

**2.** La société décide de moduler le montant du chèque cadeau correspondant à la fiche tirée au sort, selon le type d'appareil et la formule de paiement. Ce montant est détaillé dans le tableau suivant.

| | Type A | Type B |
|---|---|---|
| Paiement immédiat | Chèque cadeau de 100 € | Chèque cadeau de 60 € |
| Paiement fractionné | Chèque cadeau de 60 € | Chèque cadeau de 30 € |

Le montant du chèque cadeau, exprimé en euro, est une variable aléatoire notée $X$ prenant les trois valeurs $30, 60, 100$.

**a.** Quelle est la probabilité de l'évènement $(X = 60)$ ?

**b.** Donner dans un tableau la loi de la variable aléatoire $X$

**c.** Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire $X$

**3.** À titre incitatif, la société est à prête à augmenter le montant du chèque cadeau uniquement dans le cas où le tirage correspond à un appareil du type A réglé avec paiement immédiat. Le montant reste inchangé dans les autres cas. La société souhaite cependant que le montant moyen du chèque cadeau ne dépasse pas 55 €.

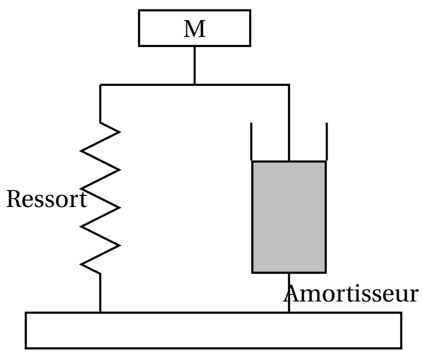
Quel est le montant maximal du chèque cadeau que peut offrir la société, pour un tirage correspondant à un appareil du type A réglé avec paiement immédiat ?

**PROBLÈME** **11 points**

Une suspension, sur laquelle est placée une charge de masse M, est composée d'un ressort vertical et, éventuellement, d'un amortisseur (schématisés ci-contre).

Pour tout nombre réel $t$ appartenant à l'intervalle $[0;\ +\infty[$. on désigne par $y(t)$ l'amplitude du ressort à l'instant $t$.

On démontre en mécanique que l'amplitude $y$ du ressort, qui est une fonction supposée deux fois dérivable est solution de l'équation différentielle :




$$\text{(E)} \quad y'' + cy' + 4y = d,$$

où $c$ et $d$ sont des constantes liées au système.

**Partie A - Système sans amortissement**

On suppose, **dans cette partie uniquement**, que $c = 0$ et $d = 0$.

**1.** Résoudre l'équation différentielle (E), qui s'écrit alors $y'' + 4y = 0$.

**2.** Déterminer la solution particulière de l'équation différentielle (E) vérifiant les égalités :

$$y(0) = 1 \quad \text{et} \quad y'(0) = -1.$$

**Partie B - Système amorti**

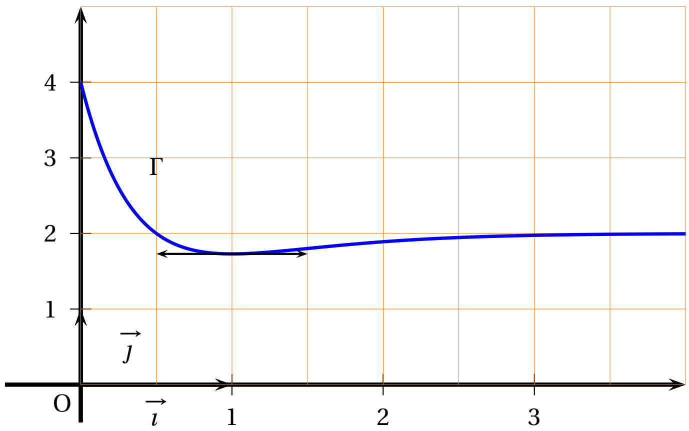
On suppose maintenant, après avoir modifié les paramètres du système, que l'on a : $c = 4$ et $d = 8$. On admet qu'une solution particulière de l'équation différentielle (E) est définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(t) = (At + B)\mathrm{e}^{-2t} + 2,$$

où $A$ et $B$ sont deux constantes réelles que l'on va déterminer.

**1.** Détermination des constantes $A$ et $B$

On donne dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ la représentation graphique $\Gamma$ de la fonction $f$.




On précise que :

- la courbe $\Gamma$ passe par le point de coordonnées $(0\,;\,4)$ ;
- la courbe $\Gamma$ admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses en son point d'abscisse 1.

**a.** Déterminer à partir de ces renseignements la valeur de $f(0)$.
En déduire la valeur de la constante $B$.

**b.** Exprimer $f'(t)$ en fonction de $A$ et de $B$.

**c.** À partir des renseignements précédents, déterminer la valeur de $f'(1)$.
En déduire la valeur de la constante $A$.

**2.** Étude de la fonction $f$

On admet désormais que pour tout nombre réel $t$ appartenant à l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ :

$$f(t) = (-4t + 2)\mathrm{e}^{-2t} + 2.$$

**a.** En remarquant que, pour tout nombre réel $t$ de l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ $f(t) = -4t\mathrm{e}^{-2t} + 2\mathrm{e}^{-2t} + 2$, déterminer $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} f(t)$.
En déduire l'existence d'une asymptote à $\Gamma$ dont on précisera une équation.

**b.** Vérifier que la fonction dérivée $f'$ de la fonction $f$ s'exprime, pour tout nombre réel $t$ appartenant à l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, par : $f'(t) = 8(t-1)\mathrm{e}^{-2t}$.

**c.** En déduire le sens de variation de la fonction $f$ sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$. Dresser le tableau de variations sur ce même intervalle.

**d.** Déterminer une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\Gamma$ au point d'abscisse 0.

**3.** Un calcul d'intégrale

Afin de mesurer les sollicitations de cet amortisseur, l'une des données à recueillir est l'amplitude moyenne du ressort sur l'intervalle $[0~;~10]$ donnée par la relation :

$$\mu = \frac{1}{10}\int_0^{10} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

**a.** Montrer que la fonction $G$ définie sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ par $G(t) = 2t\mathrm{e}^{-2t}$, est une primitive de la fonction $g$ définie sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ par :

$$g(t) = (-4t+2)\mathrm{e}^{-2t}.$$

**b.** En déduire la valeur exacte de l'amplitude moyenne $\mu$ du ressort puis la valeur approchée arrondie à l'entier le plus proche.