Durée : 4 heures

Corrigé du baccalauréat STI Novembre 2011
Génie mécanique - Génie énergétique - Génie civil Nouvelle-Calédonie

EXERCICE 1 **5 points**

1. $(z-2-2\mathrm{i})\left(\mathrm{i}z+\sqrt{3}-3\mathrm{i}\right)=0 \iff \left\{\begin{array}{lcl} z-2-2\mathrm{i} & = & 0\\ \mathrm{i}z+\sqrt{3}-3\mathrm{i} & = & 0\end{array}\right. \iff$

$\left\{\begin{array}{lcl} z & = & 2+2\mathrm{i} \quad \text{ou}\\ \mathrm{i}z & = & -\sqrt{3}+3\mathrm{i}\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} z & = & 2+2\mathrm{i} \quad \text{ou}\\ z & = & +\mathrm{i}\sqrt{3}+3\end{array}\right.$

L'équation a deux solutions : $2+2\mathrm{i}$ et $3+\mathrm{i}\sqrt{3}$.

2. **a.** On a $|a|^2=9+3=12=\left(2\sqrt{3}\right)^2 \Rightarrow |a|=2\sqrt{3}$.

D'où en factorisant ce module : $a=2\sqrt{3}\left(\right)\dfrac{\sqrt{3}}{2+\mathrm{i}\dfrac{1}{2}}=2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)=$

$2\sqrt{3}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{6}}$.

Un argument de a est donc $\frac{\pi}{6}$.

$|b|^2=4+4=4\times 2=\left(2\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow |b|=2\sqrt{2}$.

Comme pour a, on peut écrire :

$b=2\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)=2\sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}}$.

Un argument de b est donc $\frac{\pi}{4}$.

b. On sait que $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}=\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$, donc $c=2\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=1+\mathrm{i}\sqrt{3}$.

c. Voir la figure.

d. $\mathrm{CA}^2=|z_{\mathrm{A}}-z_{\mathrm{C}}|^2=\left|3+\mathrm{i}\sqrt{3}-1-\mathrm{i}\sqrt{3}\right|^2=|2|^2=4$.

D'autre part $|c|^2=\mathrm{OC}^2=2^2=4$.

Donc $\mathrm{CA}^2=\mathrm{OC}^2 \Rightarrow \mathrm{CA}=\mathrm{OC} \Rightarrow$ OCA est isocèle en C.

3. Les points A et C ont la même ordonnée : la droite (AC) est donc parallèle à l'axe des abscisses. En prenant comme base le segment [CA] la hauteur correspondante a pour mesure $\sqrt{3}$, donc l'aire du triangle OAC est égale à :

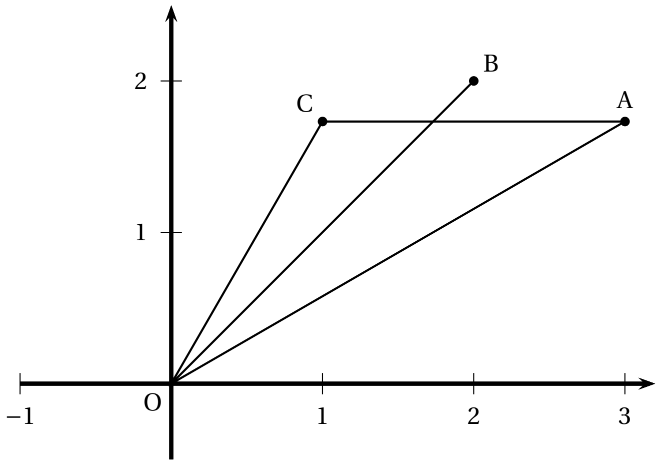
$\dfrac{\mathrm{CA}\times\sqrt{3}}{2}=\dfrac{2\times\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$.

4. Avec les arguments trouvés pour a, b et c, on a :

$\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\,,\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{3\pi-2\pi}{12}=\dfrac{\pi}{12}$;

$\left(\overrightarrow{\mathrm{OB}}\,,\,\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)=\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{4\pi-3\pi}{12}=\dfrac{\pi}{12}$.

Conclusion : La droite (OB) est une bissectrice du triangle OCA.



EXERCICE 2 **4 points**

1. a. $p(A) = \dfrac{70}{200} = \dfrac{35}{100} = 0,35$;
   $p(I) = \dfrac{50}{200} = \dfrac{25}{100} = 0,25$.
   b. $p(A \cap F) = \dfrac{50}{200} = \dfrac{25}{100} = 0,25$.
   c. $p(A \cup F) = p(A) + p(F) - p(A \cap F)$.
   Or $p(F) = \dfrac{150}{200} = \dfrac{75}{100} = 0,75$. Donc :
   $p(A \cup F) = 0,35 + 0,75 - 0,25 = 0,85$.
2. a. Il y a $30+50 = 80$ ventes qui conduisent à un chèque cadeau de 60 €, donc
   $p(X = 60) = \dfrac{80}{200} = \dfrac{40}{100} = 0,4$.
   b.

X	30	60	100
$p(X = x_i)$	0,5	0,4	0,1

   c. $\text{E}(X) = 30 \times 0,5 + 60 \times 0,4 + 100 \times 0,1 = 15 + 24 + 10 = 59$ (€).
3. Soit m le montant maximal. Il faut que l'espérance mathématique de la variable aléatoire X soit inférieure ou égale à 55, soit :
   $30 \times 0,5 + 60 \times 0,4 + m \times 0,1 \leqslant 55 \iff 38 + 0,1m \leqslant 55 \iff 0,1m \leqslant 17 \iff m \leqslant 170$.
   La société peut offrir jusque'à 170 € par appareil A vendu avec un règlement immédiat.

PROBLÈME **11 points**

1. L'équation est de la forme $y'' + \omega^2 y = 0$, avec $\omega = 2$. Toutes les solutions de (E) sont définies sur $\mathbb{R}$ par :
   $f(x) = A\cos 2x + B\sin 2x$, avec A et B deux constantes réelles.
2. Avec $y = A\cos 2x + B\sin 2x$,
   $y' = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x$,
   $y'' = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x$. Donc
   $\left\{\begin{array}{lcl} y(0) & = & 1 \\ y'(0) & = & -1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} A & = & 1 \\ 2B & = & -1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} A & = & 1 \\ B & = & -\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$.
   La solution particulière est donc :
   $y = \cos 2x - \dfrac{1}{2}\sin 2x$.

Partie B - Système amorti

1. **a.** On a $f(0) = 4$ (lisible aussi sur le graphe). $f(0) = 4 \iff (A \times 0 + B)\text{e}^{-2\times 0} + 2 = 4 \iff B + 2 = 4 \iff B = 2$.

   b. $f'(t) = A\text{e}^{-2t} - 2(At + B)\text{e}^{-2t} = (A - 2B - 2At)\text{e}^{-2t}$.

   c. À partir des renseignements précédents, déterminer la valeur de $f'(1)$. La deuxième information signifie que $f'(1) = 0$ (tangente horizontale), soit d'après le résultat précédent :
   $f'(1) = (A - 2B - 2A \times 1)\text{e}^{-2\times 1} = 0 \iff (-A - 2B)\text{e}^{-2} = 0 \iff -A - 2B = 0 \iff A = -2B = -4$ d'après la question a.)
   Finalement $f(t) = (-4t + 2)\text{e}^{-2t} + 2$.

2. **a.** Posons $T = 2t$; donc $-4t\text{e}^{-2t} = 2 \times \left(-2t\text{e}^{-2t}\right) = 2(-T)\text{e}^{-T}$
   Si $t \to +\infty$, $\quad T \to +\infty$; on sait que $\displaystyle\lim_{T\to+\infty} -T\text{e}^{-T} = 0$, donc
   $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} -4t\text{e}^{-2t} = 0$.
   D'autre part $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} 2\text{e}^{-2t} = 0$, d'où par somme de limites :
   $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f(t) = 2$.
   Ce résultat signifie géométriquement que la droite d'équation $y = 2$ est asymptote horizontale à Γ au voisinage de plus l'infini.

   b. On dérive : $f(t) = (-4t + 2)\text{e}^{-2t} + 2$:
   $f'(t) = -4\text{e}^{-2t} - 2(-4t + 2)\text{e}^{-2t} = (-4 + 8t - 4)\text{e}^{-2t} = (8t - 8)\text{e}^{-2t} = 8(t - 1)\text{e}^{-2t}$.

   c. On sait que $\text{e}^{-2t} > 0$ quel que soit le réel t. Le signe de $f'(t)$ est donc celui de $(t - 1)$. Donc :
   - sur $[0\,;\,1]$ $f'(t) < 0$: la fonction est décroissante ;
   - sur $[1\,;\,+\infty[$, $\quad f'(t) > 0$: la fonction est croissante.
   - $f(1)$ est le minimum de f.

   d. On a $f(0) = 4$ et $f'(0) = -8$.
   $M(x\,;\,y) \in \mathcal{T} \iff y - f(0) = f'(0)(x - 0) \iff y - 4 = -8x \iff y = -8x + 4$.

3. **a.** G produit de fonctions dérivables sur $[0\,;\,+\infty[$ est dérivable sur cet intervalle et :
   $G'(x) = 2\text{e}^{-2t} - 2 \times 2t\text{e}^{-2t} = \text{e}^{-2t}(2 - 4t) = g(t)$.
   G est donc l'une des primitives sur $[0\,;\,+\infty[$ de la fonction g.

   b. $\mu = \dfrac{1}{10}\displaystyle\int_0^{10} f(t)\,\text{d}t = \dfrac{1}{10}\displaystyle\int_0^{10} \left[(-4t + 2)\text{e}^{-2t} + 2\right]\text{d}t = \dfrac{1}{10}\displaystyle\int_0^{10} g(t)\,\text{d}t + \dfrac{1}{10}\displaystyle\int_0^{10} 2\,\text{d}t = \dfrac{1}{10}[G(t)]_0^{10} + \dfrac{1}{10}[2t]_0^{10} = \dfrac{1}{10} \times 2 \times 10\text{e}^{-2\times 10} - \dfrac{1}{10} \times 2 \times 0\text{e}^{-2\times 0} + \dfrac{1}{10} \times 2 \times 10 - \dfrac{1}{10} \times 2 \times 0 = 2\text{e}^{-20} + 2 = 2\left(1 + \text{e}^{-20}\right) \approx 2$.