Durée : 4 heures

Corrigé du baccalauréat STI Génie mécanique, civil Métropole 21 juin 2011

EXERCICE 1 **5 points**

1. Voir l'annexe
2. Il y a $3 \times 2 \times 3 = 18$ branches donc 18 repas différents.
3. Il y a une chance sur deux de choisir poisson ou viande, donc $p(\text{A}) = \dfrac{1}{2}$.
   De même on peut choisir de façon équiprobable chacun des trois déserts, donc $p(\text{B}) = \dfrac{1}{3}$.
   $p(\text{A} \cap \text{B}) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{6}$ car les évènements A et B sont indépendants.
   $p(\text{A} \cup \text{B}) = \text{p(A)} + p(\text{B}) - p(\text{A} \cap \text{B}) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{6} = \dfrac{4}{6}\dfrac{2}{3}$.
4. Voir l'annexe.
5. **a.** $R \in \{1000,\ 1100,\ 1200,\ 1300,\ 1400,\ 1500,\ 1600,\ \}$.

   b.

$X = R_i$	1 000	1 100	1 200	1 300	1 400	1 500	1 600
$p(X = R_i)$	$\frac{4}{18}$	$\frac{2}{18}$	$\frac{2}{18}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{2}{18}$	$\frac{2}{18}$	$\frac{1}{18}$

   c. L'espérance mathématique de cette variable est donc :
   $\text{E}(R) = 1000 \times \frac{4}{18} + 1100 \times \frac{2}{18} + 1200 \times \frac{2}{18} + 1300 \times \frac{5}{18} + 1400 \times \frac{2}{18} + 1500 \times \frac{2}{18} + 1600 \times \frac{1}{18} = \dfrac{22500}{18} = 1250$.
   Sur un grand nombre de repas pris dans ce restaurant, le bilan calorique moyen d'un repas est 1 250 kcal.

EXERCICE 2 **5 points**

1. On a $f'(x) = 2 \times 3\text{e}^{2x} = 6\text{e}^{2x}$. Donc $f'(0) = 6$. Comme $f(0) = 3$ l'équation est de la forme $y = 6x + b$ et $3 = 6 \times 0 + 3$ soit $b = 3$. D'où la réponse D.
2. Une primitive de e^{2x} est $\dfrac{1}{2}\text{e}^{2x}$; donc :
   $I = \displaystyle\int_0^a \text{e}^{2x}\,\text{d}x = \left[\frac{1}{2}\text{e}^{2x}\right]_0^a = \frac{1}{2}\text{e}^{2a} - \frac{1}{2}\text{e}^{2\times 0} = \frac{1}{2}\text{e}^{2a} - \frac{1}{2}$. Donc réponse A.
3. $y' + \dfrac{1}{2}y = 0 \iff y' = -\dfrac{1}{2}y$. On sait que les solutions de cette équation sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = C\text{e}^{-\frac{1}{2}x}$, C étant un réel quelconque. D'où la réponse C.
4. On peut écrire : $z = -\dfrac{3}{2} + \text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \text{i}\dfrac{1}{2}\right)$.

   Or $-\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{pi}{6}$ et $\dfrac{1}{2} = \sin\frac{5\pi}{6}$, donc un argument de z est $\frac{\pi}{6}$. On a donc $z = \sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + \text{i}\sin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}\text{e}^{\text{i}\frac{5\pi}{6}}$. Réponse C.
5. On a : $\Omega\text{M}^2 = |1 - 3\text{i} - 3 + \text{i}|^2 = |-2 - 2\text{i}|^2 = 4 + 4 = 8 = \left(2\sqrt{2}\right)^2$; réponse A.

PROBLÈME **10 points**

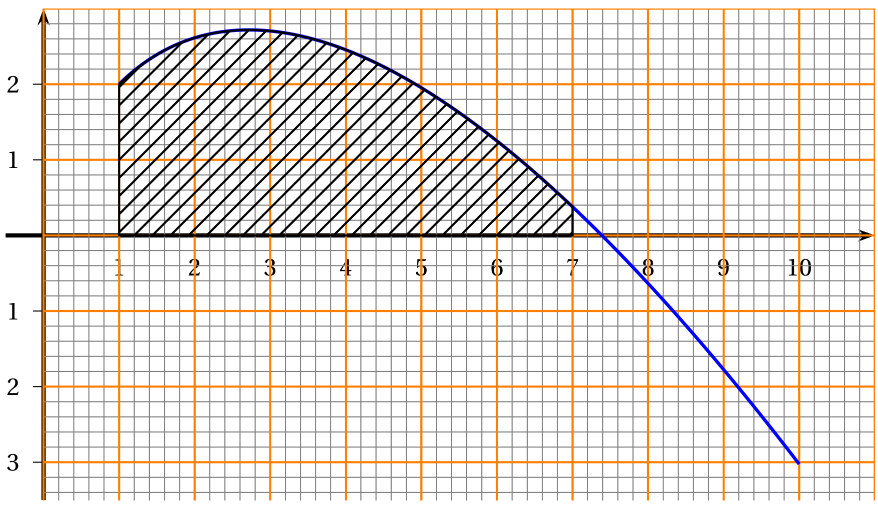
1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc sur $[1\,;\,10]$ et sur cet intervalle :
$f'(x) = -\ln x - x \times \dfrac{1}{x} + 2 = -\ln x - 1 + 2 = 1 - \ln x$.

2. **a.** On a $f'(x) > 0 \iff 1 - \ln x > 0 \iff 1 > \ln x$ et par croissance de la fonction exponentielle $\text{e} > x \iff x < \text{e}$.
On a donc $f'(x) > 0$ sur $[1\,;\,\text{e}]$ et de la même façon on trouverait que $f'(x) < 0$ sur $[\text{e}\,;\,10]$.
Enfin $f(\text{e}) = 0$.

b. $f(1) = -1\ln 1 + 2 \times 1 = 2$, f(e) - $\text{e}\ln\text{e} + 2\text{e} = \text{e}$ et $f(10) = -10\ln 10 + 2 \times 10 = 20 - 10\ln 10$.
On en déduit le tableau de variations suivant :

x	1		e		10
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	1	↗	e	↘	$20 - 10\ln 10$

3.



4. **a.** Sur $[1\,;\,10]$, $f(x) = 0 \iff 2x - x\ln x = 0 \iff x(2 - \ln x) = 0 \iff \begin{cases} x = 0 \\ 2 - \ln x = 0 \end{cases} \iff$
$\begin{cases} x = 0 \\ 2 = \ln x \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ \text{e}^2 = x \end{cases}$
Comme $0 \notin [1\,;\,10]$ il n'y a qu'une solution e^2.

b. On a $\text{e}^2 \approx 7,389 \approx 7,39$ à 10^{-2} près.

5. **a.** F est dérivable sur $[1\,;\,10]$ et sur cet intervalle :
$F'(x) = 2x\left(\dfrac{5}{4} - \dfrac{1}{2}\ln x\right) + x^2\left(-\dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{5}{2}x - x\ln x - \dfrac{1}{2}x = 2x - x\ln x = f(x)$.
Donc F est une primitive de f sur $[1\,;\,10]$.

b.

c. L'unité sur les deux axes étant égale à 1 cm, chaque carreau a une aire de 1 cm^2. La surface hachurée contient approximativement 12 carreaux, donc l'aire de la portion est à peu près égale à 12 cm^2.

d. La fonction f étant positive sur l'intervalle $[1\,;\,7]$, l'aire de la surface S est égale à l'intégrale :
$\displaystyle\int_1^7 f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_1^7 = F(7) - F(1) = 7^2\left(\frac{5}{4} - \frac{1}{2}\ln 7\right) - \left[1^2\left(\frac{5}{4} - \frac{1}{2}\ln 1\right)\right] =$
$\dfrac{245}{4} - \dfrac{49\ln 7}{2} - \dfrac{5}{4} = 60 - \dfrac{49\ln 7}{2}\ \text{cm}^2 \approx 12,3.$

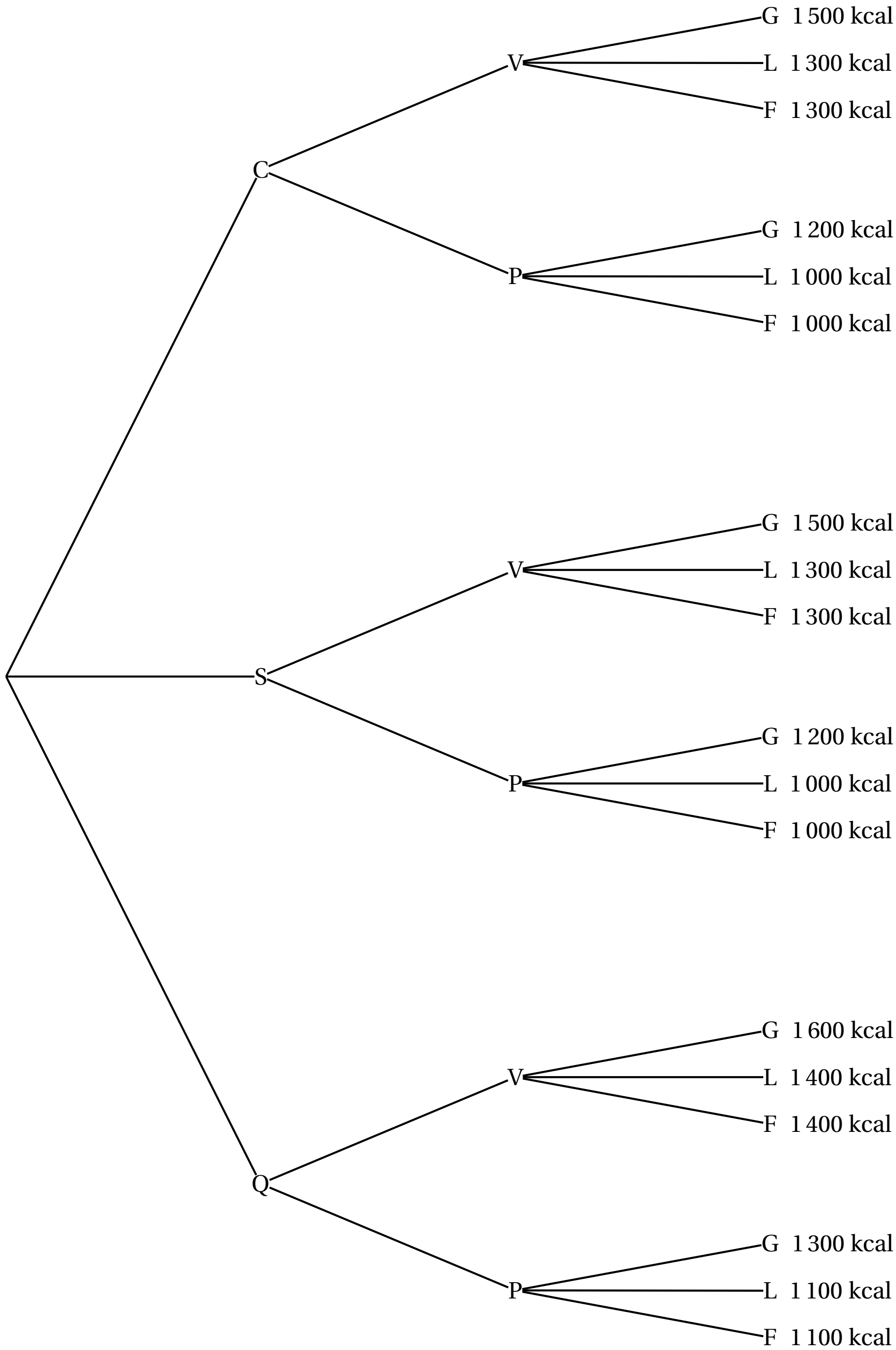
6. **a.** La calculatrice donne $V_s \approx 88,005 \approx 88,01$ unités de volume à 10^{-2} près.

b. Méthode des trois niveaux :
On a donc $V_e \approx \dfrac{1}{6} \times 6\,(12,57 + 4 \times 18,86 + 0,45) \approx 88,46$.

c. On a $\dfrac{V_e}{V_s} \approx \dfrac{88,46}{88,01} \approx 1,005$.
La méthode des trois niveaux est acceptable pour cet exemple.

ANNEXE (à rendre avec la copie)

Exercice 1 : arbre des repas



Problème : tableau des surfaces

Surface	Section gauche	Section intermédiaire	Section droite
Rayons	$f(1) = -1\ln 1 + 2 \times 1 = 2$	$f(4) = -4\ln(4) + 8 \approx 2,45$	$f(7) = -7\ln 7 + 2 \times 7 = 1 \approx 0,38$
Aires	12,57	18,86	0,45