Durée : 4 heures

∾ Baccalauréat STI Génie mécanique, civil ∾ Métropole 21 juin 2011

EXERCICE 1 **5 points**

Au libre-service d'un restaurant d'entreprise, un repas est composé obligatoirement d'une entrée, d'un plat et d'un dessert. Pour chaque repas, un employé choisit au hasard :

— une entrée parmi trois : Crudités (C), Salade (S) ou Quiche (Q),
— un plat parmi deux : Poisson (P) ou Viande (V)
— un dessert parmi trois : Glace (G), Fruits (F) ou Laitage (L).

1. Sur l'annexe fournie (à rendre avec la copie), compléter l'arbre des repas.
2. En déduire le nombre de repas que peut composer un employé.
3. On appelle :

   A l'évènement : « le repas composé contient le plat de poisson »,

   B l'évènement : « le repas composé contient des fruits au dessert ».

   On note $p(\text{A})$ la probabilité de l'évènement A.

   Calculer $p(\text{A})$, $p(\text{B})$, $p(\text{A} \cap \text{B})$ et en déduire $p(\text{A} \cup \text{B})$.
4. Le tableau suivant donne en kcal le bilan calorique des mets proposés :

Entrées	Crudités (C) : 300	Salade composée (S) : 300	Quiche (Q) : 400
Plats	Viande (V) : 900		Poisson (P) : 600
Desserts	Glace (G) : 300	Laitage (L) : 100	Fruits (F) : 100

   Compléter, sur l'annexe, le bilan calorique de chaque repas.
5. On appelle R la variable aléatoire qui à chaque repas associe son bilan calorique.
   a. Donner l'ensemble des valeurs que peut prendre la variable aléatoire R.
   b. Établir la loi de probabilité de la variable aléatoire R.
   c. Montrer que le bilan calorique moyen d'un repas est 1 250 kcal.

EXERCICE 2 **5 points**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM). Les questions sont indépendantes les unes des autres. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Une seule réponse par question est acceptée et aucune justification n'est demandée.
Une bonne réponse rapporte un point.
Une mauvaise réponse ou l'absence de réponse n'apporte ni n'enlève de point. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la réponse choisie correspondante.

1. Soit f la fonction définie pour tout nombre réel x par $f(x) = 3\text{e}^{2x}$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère donné.
   Une équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point de la courbe d'abscisse 0 est :
   A. $y = 3x + 3$
   B. $y = 6x + 6$
   C. $y = 3x + 6$
   D. $y = 6x + 3$

2. Pour tout nombre réel a, on définit le nombre $I = \displaystyle\int_0^a \text{e}^{2x}\,\text{d}x$. La valeur de I est :

A. $I = 0,5\text{e}^{2a} - 0,5$
B. $I = 0,5\text{e}^{2a-0,5}$
C. $I = 0,5 - \text{e}^{2a}$
D. $I = 0,5 - 0,5\text{e}^{2a}$

3. Soit l'équation différentielle $y' + \dfrac{1}{2}y = 0$ où y désigne une fonction dérivable de la variable réelle x.
Trouver parmi ces fonctions dérivables sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$, une solution de l'équation proposée.

A. $f(x) = 40\text{e}^{0,5x}$
B. $g(x) = -10\cos(0,5x) + 12\sin(0,5x)$
C. $h(x) = 120\text{e}^{-0,5x}$
D. $i(x) = -0,5x$

4. Une écriture sous forme exponentielle du nombre complexe $z = -\dfrac{3}{2} + \text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ est :

A. $z = 3\text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{3}}$
B. $z = 3\text{e}^{\text{i}\frac{2\pi}{3}}$
C. $z = \sqrt{3}\text{e}^{\text{i}\frac{5\pi}{6}}$
D. $z = \sqrt{3}\text{e}^{\text{i}\frac{2\pi}{3}}$

5. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé. On considère le point Ω d'affixe $3 - \text{i}$ et le cercle $\mathscr{C}$ de centre Ω et de rayon $2\sqrt{2}$. Trouver parmi les points proposés un point du cercle $\mathscr{C}$.

A. M d'affixe $1 - 3\text{i}$
B. N d'affixe $2 + \text{i}\sqrt{3}$
C. P d'affixe $2 - 2\text{i}\sqrt{3}$
D. Q d'affixe 0

PROBLÈME **10 points**

Objectif : *Le but de ce problème est de comparer, sur un exemple, deux méthodes de calcul de volumes.*

On considère la fonction f définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $[1 ; 10]$ par

$$f(x) = -x\ln x + 2x.$$

1. Montrer que la fonction dérivée f' de la fonction f est définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $[1 ; 10]$ par : $f'(x) = -\ln x + 1$.

2. a. Étudier le signe de $f'(x)$ en fonction des valeurs du nombre réel x de l'intervalle $[1 ; 10]$.

b. En déduire le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[1 ; 10]$.

3. On appelle $\mathscr{C}$ la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthonormé du plan (unités : 1 cm en abscisses, 1 cm en ordonnées).
Représenter graphiquement $\mathscr{C}$ dans ce repère.

4. On considère l'équation (E) : $f(x) = 0$ sur l'intervalle $[1 ; 10]$.

a. Déterminer le nombre de solutions de l'équation (E).

b. Pour chacune des solutions trouvées, donner une valeur approchée à 10^{-2} près, en explicitant votre méthode.

5. On considère la fonction F, définie pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[1 ; 10]$, par

$$F(x) = x^2\left(\frac{5}{4} - \frac{1}{2}\ln x\right).$$

a. Montrer que la fonction F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[1 ; 10]$.

b. Sur la représentation graphique réalisée précédemment, hachurer la portion S du plan comprise entre $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 7$.

c. À l'aide de la représentation graphique, évaluer (en unités d'aire) l'aire de la portion S.
Justifier la méthode utilisée.

d. Calculer la valeur exacte de cette aire en unités d'aire.

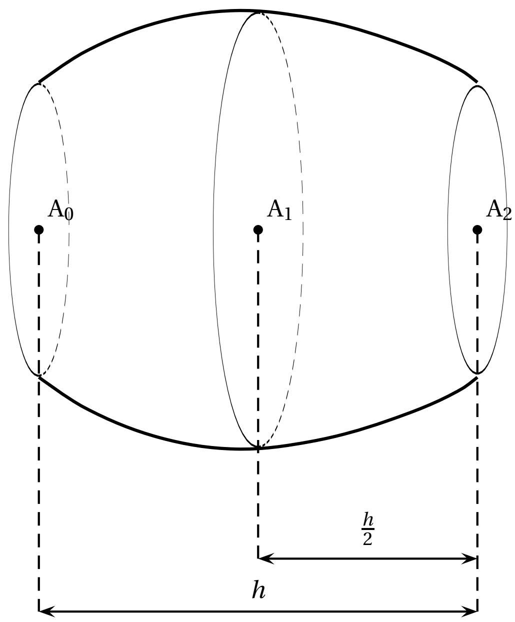
6. On veut déterminer le volume V_s du solide engendré par la rotation de la partie hachurée autour de l'axe des abscisses.

a. Méthode par calcul formel :
À l'aide d'un logiciel de calcul formel on obtient :

$$V_s = \pi\left(\frac{343(\ln 7)^2}{3} - \frac{4\,802\ln 7}{9} + \frac{1\,900}{3}\right) \text{ unités de volume.}$$

En déduire une valeur approchée de V_s à 10^{-2} près.

b. Méthode des trois niveaux :
La méthode, dite des trois niveaux, permet d'estimer le volume d'un solide.



Par cette méthode, le volume estimé d'un solide de révolution de hauteur h est égale à

$V_e = \dfrac{1}{6}h\left(\mathrm{A}_0 + 4\mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_2\right)$ où A_0 est l'aire de la section gauche, A_1 l'aire de la section intermédiaire et A_2 l'aire de la section droite.

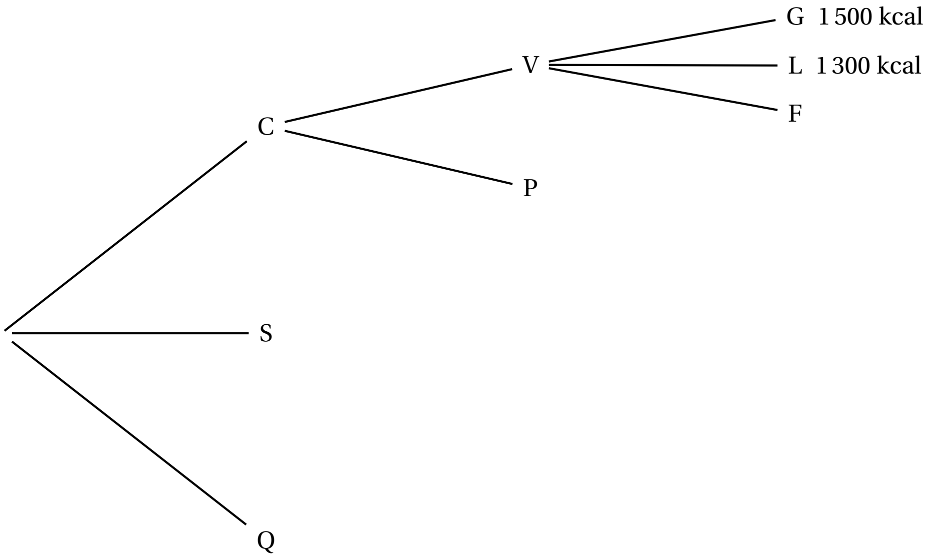
Compléter, par des valeurs approchées au centième, le tableau des surfaces figurant en annexe.

En déduire une valeur approchée à 10^{-2} près de V_e.

c. On considère que la méthode des trois niveaux est acceptable si le rapport $\dfrac{V_e}{V_s}$ est compris entre 0,95 et 1,05. Peut-on affirmer que cette méthode des trois niveaux est acceptable pour cet exemple ?

ANNEXE (à rendre avec la copie)

Exercice 1 : arbre des repas



Problème : tableau des surfaces

Surface	Section gauche	Section intermédiaire	Section droite
Rayons		$f(4) = -4\ln(4) + 8 \approx 2,45$	
Aires	12,57		