Durée : 4 heures

Corrigé du baccalauréat STI Génie mécanique, civil Métropole juin 2007

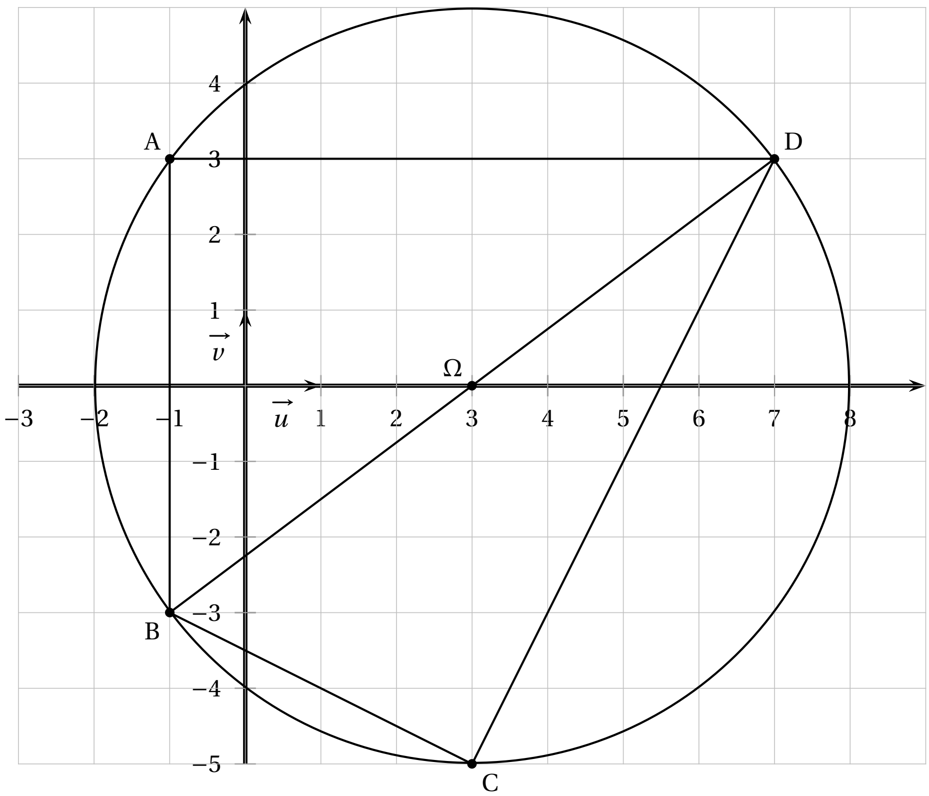
EXERCICE 1 **4 points**

1. On sait que les solutions sont de la forme $y = A\cos\pi x + B\sin\pi x$, $A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R}$.
2. Il faut trouver une fonction g telle que $g(x) = A\cos\frac{\pi}{2}x + B\sin\frac{\pi}{2}x$ et donc $g'(x) = -A\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}x + B\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}x$ et vérifiant
$\left\{\begin{array}{rcl} g\left(\frac{1}{2}\right) & = & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ g'\left(\frac{1}{2}\right) & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} A\cos\frac{\pi}{2}\frac{1}{2} + B\sin\frac{\pi}{2}\frac{1}{2} & = & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -A\sin\frac{\pi}{2}\frac{1}{2} + B\cos\frac{\pi}{2}\frac{1}{2} & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} A\frac{\sqrt{2}}{2} + B\frac{\sqrt{2}}{2} & = & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -A\frac{\sqrt{2}}{2} + B\frac{\sqrt{2}}{2} & = & 0 \end{array}\right. \iff$
$\left\{\begin{array}{rcl} A + B & = & 1 \\ -A + B & = & 0 \end{array}\right. \Rightarrow 2B = 1 \iff B = \dfrac{1}{2}$ et donc $A = \dfrac{1}{2}$.
Donc $g(x) = \dfrac{1}{2}\cos\frac{\pi}{2}x + \dfrac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}x$.
3. $g(x) = \dfrac{1}{2}\cos\frac{\pi}{2}x + \dfrac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos\dfrac{\pi}{2}x + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\dfrac{\pi}{2}x\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\dfrac{\pi x}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right)$.
4. La valeur moyenne de la fonction g sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ est égale à :
$\dfrac{1}{1-0}\displaystyle\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\dfrac{\pi x}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}x = \left[\dfrac{2}{\pi}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\dfrac{\pi x}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right)\right]_0^1 = \dfrac{\sqrt{2}}{\pi}\sin\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\sqrt{2}}{\pi}\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{\pi} + \dfrac{1}{\pi} = \dfrac{2}{\pi}$.

EXERCICE 2 **5 points**

1. $z^2+2z+10 = 0 \iff (z+1)^2-1+10 = 0 \iff (z+1)^2+9 = 0 \iff (z+1)^2-(3\mathrm{i})^2 = 0 \iff (z+1+3\mathrm{i})(z+1-3\mathrm{i}) = 0$.
L'équation a donc deux solutions complexes conjuguées :
$$\{-1-3\mathrm{i}\,;\,-1-3\mathrm{i}\}.$$
Autre méthode : $\Delta = 4-40 = -36 = (6\mathrm{i})^2 \ldots$
2. $\left\{\begin{array}{rcl} -2c+d & = & 1+13\mathrm{i} \\ -c+d & = & 4+8\mathrm{i} \end{array}\right. \Rightarrow$ par différence $c = 3-5\mathrm{i}$, d'où $d = c+4+8\mathrm{i} = 3-5\mathrm{i}+4+8\mathrm{i} = 7+3\mathrm{i}$.
3. **a.** Voir la figure à la fin de l'exercice.
   b. On a $z_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}} = -1-3\mathrm{i}-(-1+3\mathrm{i}) = -6\mathrm{i}$.
   $z_{\overrightarrow{\mathrm{AD}}} = 7+3\mathrm{i}-(-1+3\mathrm{i}) = 8$.
   On a donc $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = -6\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AD}} = 8\overrightarrow{u}$. Comme $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ le sont aussi. Donc ABD est rectangle en A.
   c. On a $\mathrm{BC}^2 = 4^2+(-2)^2 = 16+4 = 20$;
   $\mathrm{CD}^2 = 4^2+8^2 = 16+64 = 80$;
   $\mathrm{BD}^2 = 8^2+6^2 = 64+36 = 100$.
   On a $100 = 80 + 20 \iff \mathrm{BD}^2 = \mathrm{CD}^2+\mathrm{BC}^2 \iff$ BCD est un triangle rectangle en C d'après la réciproque du théorème de Pythagore.

d. Les deux triangles rectangles BCD et BAD ont la même hypoténuse [BD] : les quatre points A, B, C et D sont sur un même cercle de centre le milieu de [BD] soit Ω. On a $\Omega(3~;~0)$. Comme $\text{BD}^2 = 100,~\text{BD} = 10$, donc le rayon du cercle est égal à 5.



PROBLÈME **11 points**

Partie A

1. On a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \text{e}^x \ln x = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\text{e}^x}{x} = +\infty$, d'où par somme de limites $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

2. **a.** On a $f(x) = \text{e}^x\left(\ln x + \dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\text{e}^x}{x}(x\ln x + 1)$. On a $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\ln x = 0$, donc $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\ln x + 1 = 1$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\text{e}^x}{x} = +\infty$, d'où par produit de limites, $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$.

   b. Le résultat précédent montre que l'axe des ordonnées $\mathcal{D}$ d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à la courbe $\mathcal{C}$ au voisinage de zéro.

Partie B : étude d'une fonction intermédiaire

1. **a.** $g'(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{2x}{x^4} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{2}{x^3} = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x^3}$.

   b. Comme $x > 0 \Rightarrow x^3 > 0$, le signe de $g'(x)$ est celui de $x^2 - 2x + 2$. Pour ce trinôme $\Delta = 4 - 8 = -4 < 0$: le trinôme est donc du signe de $a = 1$ donc positif.

   Conclusion : $g'(x) > 0$, donc la fonction g est croissante sur $]0~;~+\infty[$.

2. **a.** On a $g\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\frac{1}{2} + \dfrac{2}{\frac{1}{2}} - \dfrac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = -\ln 2 + 4 - 8 = -\ln 2 - 4 < 0$ et $f(1) = \ln 1 + \dfrac{2}{1} - \dfrac{1}{1^2} = 0 + 2 - 1 = 1 > 0$.

Comme la fonction g est croissante sur $\left[\dfrac{1}{2}\,;\,1\right]$, il existe un réel unique α de cet intervalle tel que $g(\alpha) = 0$.

b. La calculatrice donne $f(0,5) \approx -0,69$ et $f(0,6) \approx 0,04$, donc $0,5 < \alpha < 0,6$:
$f(0,59) \approx -0,01$ et $f(0,60) \approx 0,04$, donc $0,59 < \alpha < 0,60$.

3. Des questions précédentes, on en déduit que :
-sur $]0\,;\,\alpha[$, $g(x) < 0$;
- sur $]\alpha\,;\,+\infty[$, $g(x) > 0$.

Partie C : étude des variations de la fonction f et construction de la courbe associée

1. **a.** f est une somme de fonctions dérivables sur $]0\,;\,+\infty[$, donc sur cet intervalle, $g'(x) = \mathrm{e}^x \ln x + \mathrm{e}^x \times \dfrac{1}{x} + \dfrac{x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x}{x^2} = \dfrac{x^2\mathrm{e}^x \ln x + x\mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x}{x^2} = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2}\left(x^2 \ln x + 2x - 1\right) = \mathrm{e}^x\left(\ln x + \dfrac{2}{x} - \dfrac{12}{x^2}\right) = \mathrm{e}^x g(x)$.

b. Comme $\mathrm{e}^x > 0$, quel que soit x, le signe de $f'(x)$ est donc celui de $g(x)$ trouvé à la question 3 de la partie précédente :
-sur $]0\,;\,\alpha[$, $f'(x) < 0$; donc f est décroissante
- sur $]\alpha\,;\,+\infty[$, $g(x) > 0$; donc f est croissante.

2. **a.**

x	0		α		$+\infty$
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

b. En prenant comme valeur approchée $\alpha \approx 0,60$, on a $f(\alpha) \approx \mathrm{e}^{0,6} + \dfrac{\mathrm{e}^{0,6}}{0,6} \approx 2,1$.

3. **a.** Reproduire et compléter le tableau ci-dessous.

x	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5	1,75	2	2,25	2,5
$f(x)$ à 10^{-1} près	3,4	2,2	2,2	2,7	3,6	4,8	6,5	8,8	11,9	16,0

b. Voir à la fin

Partie D : calcul d'aire

1. F est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et
$F'(x) = \mathrm{e}^x \ln x + \mathrm{e}^x \times \dfrac{1}{x} = \mathrm{e}^x \ln x + \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = f(x)$.
F est donc une primitive de f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

2. **a.** Voir la figure

b. Le tableau de variations montre que $f(x) > 0$, quel que soit le réel x. Donc l'aire en unité d'aire de la surface $\mathscr{E}$ est égale à l'intégrale
$\displaystyle\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_1^2 = F(2) - F(1) = \mathrm{e}^2 \ln 2 - \mathrm{e}^1 \ln 1 = \mathrm{e}^2 \ln 2$ (u. a.).
Or l'unité d'aire est égale à $4 \times 1 = 4$ cm^2. Donc finalement :
$\mathscr{A}(\mathscr{E}) = 4 \times \mathrm{e}^2 \ln 2 \approx 20,49$ cm^2.