**Durée : 4 heures**

# Baccalauréat STI Génie mécanique, civil
# Métropole 16 septembre 2011

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée pour cette épreuve.
Le candidat doit traiter les deux exercices et le problème.

**EXERCICE 1** **5 points**

On appelle C l'ensemble des nombres complexes.
Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité graphique 2 cm.
On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

1. Déterminer les nombres complexes $z_1$ et $z_2$ vérifiant le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl}\sqrt{3}z_1 + z_2 &=& 4\\ z_1 - \sqrt{3}z_2 &=& 4\mathrm{i}\end{array}\right.$$

2. Soit $M_1$ et $M_2$ les points d'affixes respectives $z_1 = \sqrt{3} + \mathrm{i}$ et $z_2 = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$.
   Écrire $z_1$ et $z_2$ sous forme trigonométrique.
3. Placer de façon précise les points $M_1$ et $M_2$ dans le repère orthonormé $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$ défini précédemment. (*On laissera apparents les traits de construction.*)
4. Calculer le module du nombre complexe $z_2 - z_1$.
   **a.** Construire le cercle de diamètre $[M_1M_2]$. (*On laissera apparents les traits de construction.*)
   **b.** Montrer, par deux méthodes différentes, que le point O appartient au cercle de diamètre $[M_1M_2]$.

**EXERCICE 2** **5 points**

*Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Aucune justification n'est demandée.*
*Pour chacune des questions, une seule des réponses proposées est exacte.*
*Le barème est le suivant :* 1 *point pour une bonne réponse et* 0 *point pour une réponse fausse ou une absence de réponse.*

*On notera sur la copie le numéro de la question suivi de la lettre correspondant à la réponse choisie.*

Une entreprise possède deux usines $U_1$ et $U_2$ produisant un même type de disque informatique à haute capacité. On a prélevé 5 000 unités sortant de l'usine $U_1$ et 3 000 de l'usine $U_2$.
Ces disques peuvent présenter deux types de défauts : un défaut de diamètre noté D et un défaut d'esthétique noté E.
La répartition des différentes configurations est donnée dans le tableau ci-dessous :

| | D seul | E seul | D et E | ni D ni E | total |
|---|---|---|---|---|---|
| usine $U_1$ | 250 | 150 | 100 | 4 500 | 5 000 |
| usine $U_2$ | 90 | 150 | 30 | 2 730 | 3 000 |
| total | 340 | 300 | 130 | 7 230 | 8 000 |

Chaque disque ayant la même chance d'être choisi, on choisit au hasard un disque parmi les 8 000 prélevés.

**1.** La probabilité que le disque choisi soit fabriqué par l'usine $U_1$ est

**a.** 1,600 **b.** 0,667 **c.** 0,625 **d.** 0,375

**2.** La probabilité que le disque choisi présente au moins le défaut D est :

**a.** $\dfrac{47}{800}$ **b.** $\dfrac{17}{800}$ **c.** $\dfrac{800}{13}$ **d.** $\dfrac{1}{32}$

**3.** La probabilité que le disque choisi présente le défaut D ou le défaut E est :

**a.** $\dfrac{51}{800}$ **b.** $\dfrac{77}{800}$ **c.** $\dfrac{1}{20}$ **d.** $\dfrac{1}{32}$

**4.** On sait que le disque choisi provient de l'usine $U_2$ La probabilité qu'il présente uniquement le défaut D est :

**a.** $\dfrac{9}{800}$ **b.** $\dfrac{9}{34}$ **c.** $\dfrac{1}{20}$ **d.** $\dfrac{3}{100}$

**5.** L'entreprise décide de commercialiser les 8 000 disques prélevés :
— les disques présentant les deux défauts sont invendables et sont détruits coûtant ainsi 0,50 euro chacun ;
— les disques présentant uniquement un défaut de diamètre D sont bradés au prix de 1,50 euros chacun :
— ceux présentant uniquement un défaut d'esthétique E sont soldés au prix de 3 euros chacun
— enfin les disques sans défaut sont vendus au prix de 10 euros chacun.

Sachant que le coût de fabrication d'un disque est de 2 euros, on considère le bénéfice exprimé en euros réalisé par l'entreprise sur la commercialisation de l'ensemble des 8 000 disques.

L'entreprise peut espérer un bénéfice, exprimé en euros, de :

**a.** 73 300 **b.** 57 300 **c.** 57 645 **d.** 73 645

## PROBLÈME **10 points**

Lors d'un usinage, la partie active d'un outil, en mouvement relatif par rapport à la pièce travaillée et aux copeaux que l'on désire produire, est soumise à des sollicitations mécaniques et thermiques très importantes.
On usine ici des barres cylindriques (en alliage d'aluminium). Le volume $V$, exprimé en centimètres cubes, de copeaux obtenus avant la mort de l'outil est modélisé par la relation :

$$V = 36000\left(\text{e}^{-0,002v} - \text{e}^{-0,004v}\right)$$

où $v$ désigne la vitesse de coupe, exprimée en mètres par minute $\left(\text{m.min}^{-1}\right)$.

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

### Partie A

L'objectif de cette partie est de déterminer la vitesse de coupe conduisant à une production maximale de copeaux avant la mort de l'outil.

**1.** Calculs préliminaires.

**a.** Calculer le volume, en cm$^3$, de copeaux obtenus avant la mort de l'outil lorsque la vitesse de coupe est de 1 200 mètres par minute ; on donnera la valeur approchée arrondie au cm$^3$.

**b.** Calculer $V$ lorsque $v$ égale 0 m.min$^{-1}$ ; pouvait-on prévoir ce résultat ?

**2.** Étude de fonction numérique

On considère la fonction numérique $f$, définie pour tout réel $x$ de l'intervalle $[0\,;\,1\,200]$ par

$$f(x) = 36\,000\left(\mathrm{e}^{-0,002x} - \mathrm{e}^{-0,004x}\right).$$

On note $f'$ la fonction dérivée de la fonction $f$, définie pour tout réel $x$ de l'intervalle $[0\,;\,1\,200]$.

**a.** Vérifier que $f'(x) = 72\mathrm{e}^{-0,002x}\left(2\mathrm{e}^{-0,002x} - 1\right)$ pour tout réel $x$ de l'intervalle $[0\,;\,1\,200]$.

Soit $g$ la fonction numérique, définie pour tout réel $x$ de l'intervalle $[0\,;\,1\,200]$ par :

$$g(x) = 2\mathrm{e}^{-0,002x} - 1.$$

La courbe représentative de la fonction $g$ est donnée en annexe.

**b.** Vérifier que la fonction $g$ s'annule en $500\ln(2)$.

**c.** À l'aide de la question b. et du graphique réalisé, déterminer le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $[0\,;\,1\,200]$.

**d.** En déduire le signe de $f'(x)$ sur cet intervalle.

**e.** Dresser alors le tableau de variation de la fonction $f$ sur l'intervalle $[0\,;\,1\,200]$.

**f.** On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de $f$ dans un repère orthogonal du plan (unités : 1 cm pour 100 unités en abscisses et 1 cm pour 1 000 unités en ordonnées).

Tracer la courbe $\mathscr{C}$ dans ce repère orthogonal.

**3.** Bilan.

**a.** Déduire de l'étude précédente le volume maximal, en centimètres cubes, de copeaux que l'on peut obtenir lors de l'usinage d'une pièce, avant la mort de l'outil.

**b.** Donner alors une valeur approchée, arrondie au mètre par minute, de la vitesse de coupe correspondante.

**Partie B**

L'objectif de cette partie est, à vitesse de coupe donnée, de déterminer le nombre d'outils nécessaires à l'obtention de 10 000 cm$^3$ de copeaux.

**1.** On considère désormais que la vitesse de coupe $v$ est de 350 mètres par minute, et que la section d'usinage $s$ est de $0,004$ centimètres carrés.

**a.** Le temps d'usinage $T_0$ (exprimé en minutes), nécessaire pour obtenir 10 000 cm$^3$ de copeaux est donné par la relation :

$$T_0 = \frac{10\,000}{v \times 100 \times s} = \frac{100}{v \times s}$$

où $v$ désigne la vitesse de coupe, exprimée en mètres par minute $\left(\text{m.min}^{-1}\right)$ et $s$ est la section d'usinage exprimée en centimètres carrés.

Déterminer une valeur approchée (par excès à la minute près) de ce temps d'usinage $T_0$.

**b.** Le temps effectif de coupe d'un outil (exprimé en minutes), est donné par la relation

$$T_{\text{eff}} = C \times x^n$$

où $x$ désigne la vitesse de coupe exprimée en mètres par minute.

Dans le cas d'une usure maximale possible de 0,3 millimètre, on obtient expérimentalement les valeurs suivantes : $C \approx 1,8 \times 10^7$ et $n \approx -2,25$.

Déterminer une valeur approchée (par défaut à la minute près) de ce temps effectif de coupe d'un outil, noté $T_{\text{eff}}$ pour une vitesse de coupe de 350 mètres par minute.

**c.** En déduire le nombre d'outils nécessaires à l'obtention de 10 000 cm$^3$ de copeaux.

**d.** *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte.*

L'exposant *négatif* dans la relation $T_{\text{eff}} = 1,8 \cdot 10^7 \times x^{-2,25}$ obtenue expérimentalement paraît-il conforme à l'intuition ? Justifier votre réponse.

**ANNEXE : courbe représentative de $g$**