Durée : 4 heures

Corrigé du baccalauréat STI Génie mécanique, civil Métropole 16 septembre 2011

EXERCICE 1 **5 points**

1.

$$\left\{\begin{array}{rcl}\sqrt{3}z_1+z_2 &=& 4\\ z_1-\sqrt{3}z_2 &=& 4\text{i}\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl}3z_1+\sqrt{3}z_2 &=& 4\sqrt{3}\\ z_1-\sqrt{3}z_2 &=& 4\text{i}\end{array}\right. \Rightarrow \text{(par somme)}4z_1=4\sqrt{3}+4\text{i} \iff z_1=\sqrt{3}+\text{i}$$

De la première équation on en déduit que :
$z_2=4-\sqrt{3}z_1=4-\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+\text{i}\right)=1-\sqrt{3}\text{i}$.

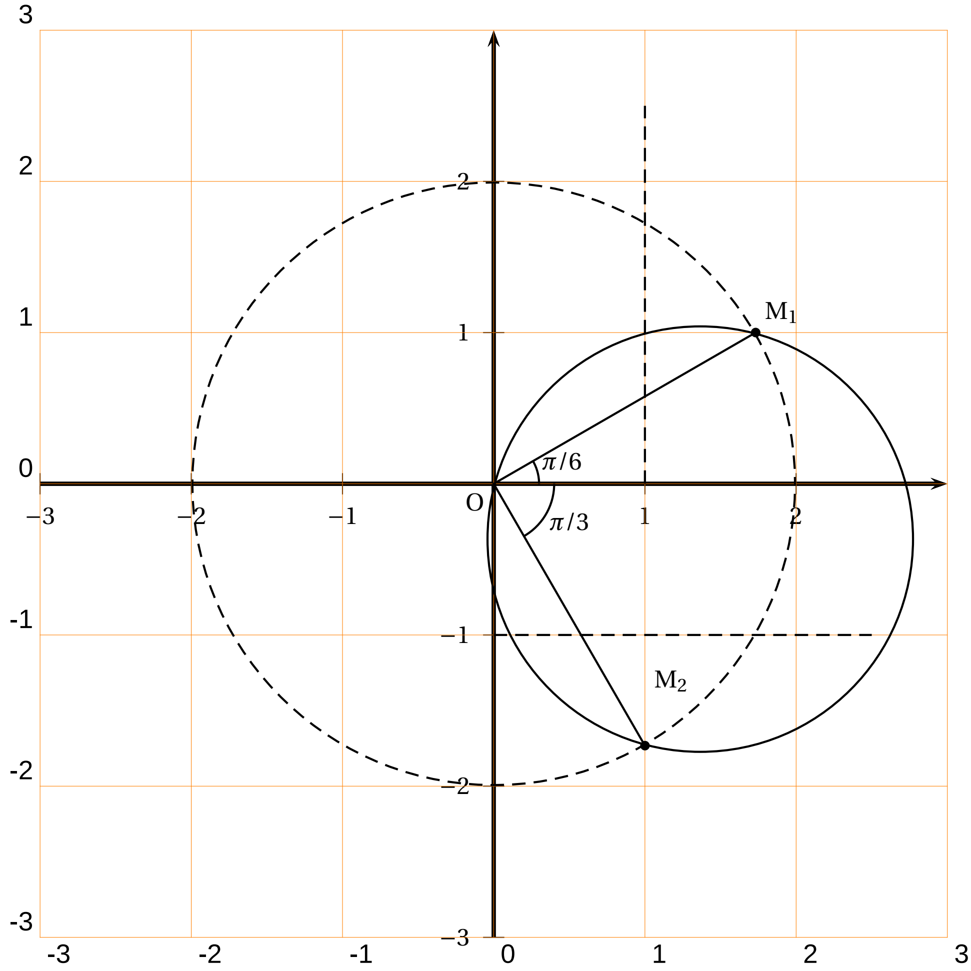
2. On a $|z_1|^2=3+1=4=2^2\Rightarrow |z_1|=2$.
Donc $z_1=2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}\text{i}\right)$.
On reconnaît le cosinus et le sinus de $\dfrac{\pi}{6}$.
$z_1=2\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+\text{i}\sin\dfrac{\pi}{6}\right)=2\text{e}^{\frac{\pi}{6}}$.
De même $|z_2|^2=1+3=4=2^2\Rightarrow |z_2|=2$.
Donc $z_2=2\left(\dfrac{1}{2}-\text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\left(\dfrac{1}{2}+\text{i}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$.
On reconnaît le cosinus et le sinus de $-\dfrac{\pi}{3}$.
$z_2=2\left(\cos\dfrac{-\pi}{3}+\text{i}\sin\dfrac{-\pi}{3}\right)=2\text{e}^{-\frac{\pi}{3}}$.

3. On place M_1 sur le cercle centré en O de rayon 2 et sur la droite d'équation $x=1$, son ordonnée étant positive.
On place M_2 sur le cercle centré en O de rayon 2 et sur la droite d'équation $y=-1$, son abscisse étant positive.
Voir la figure.

4. On a $|z_2-z_1|=\left|1-\text{i}\sqrt{3}-\sqrt{3}-\text{i}\right|=\left|1-\sqrt{3}+\text{i}\left(-\sqrt{3}-1\right)\right|$.
Donc $|z_2-z_1|^2=\left(1-\sqrt{3}\right)^2+\left(\sqrt{3}+1\right)^2=1+3-2\sqrt{3}+3+1+2\sqrt{3}=8\Rightarrow |z_2-z_1|=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$.

a. On construit la médiatrice de $[\text{M}_1\text{M}_2]$ qui coupe ce segment au centre du cercle. Le cercle a pour rayon $\dfrac{\text{M}_1\text{M}_2}{2}=\sqrt{2}$.

b. • Le milieu O_1 de $[\text{M}_1\text{M}_2]$ a pour cordonnées $\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\ ;\ \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$.
On a donc $\text{OO}_1^2=\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\right)^2=\dfrac{1+3+2\sqrt{3}}{4}+\dfrac{1+3-2\sqrt{3}}{4}=2\Rightarrow \text{OO}_1=\sqrt{2}$.
Le point O est bien à une distance de O_1 égale au rayon du cercle.
• Étant donné que $\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{2}$, le triangle OM_1M_2 est rectangle en O. Il est inscrit dans le cercle de diamètre son hypoténuse $[\text{M}_1\text{M}_2]$, donc le point O appartient au cercle de diamètre $[\text{M}_1\text{M}_2]$



Exercice 2 **5 points**

1.	**a.** 1,600	**b.** 0,667	**c.** $\boxed{0{,}625}$	**d.** 0,375
2.	**a.** $\boxed{\dfrac{47}{800}}$	**b.** $\dfrac{17}{800}$	**c.** $\dfrac{800}{13}$	**d.** $\dfrac{1}{32}$
3.	**a.** $\dfrac{51}{800}$	**b.** $\boxed{\dfrac{77}{800}}$	**c.** $\dfrac{1}{20}$	**d.** $\dfrac{1}{32}$
4.				
5.	**a.** 73 300	**b.** 57 300	**c.** $\boxed{57\,645}$	**d.** 73 645

Problème **10 points**

Partie A

1. Calculs préliminaires.

a. $V(1\,200) = 36\,000\left(\mathrm{e}^{-0{,}002\times1\,200} - \mathrm{e}^{-0{,}004\times1\,200}\right) \approx 1\,703{,}099 \approx 1\,703\ \text{cm}^3$.

b. $V(0) = 36\,000(1-1) = 0$, ce qui est normal : vitesse nulle, outil à l'arrêt, donc pas de copeaux.

2. **a.** $u(x)$ étant étant une fonction dérivable de l'intervalle $[0\,;\,1\,200]$, on sait que la dérivée de la fonction $\mathrm{e}^{u(x)}$ sur le même intervalle est $u' \times \mathrm{e}^{u(x)}$.

Donc $f'(x) = 36\,000\left(-0,002\mathrm{e}^{-0,002x} - (-0,004)\mathrm{e}^{-0,004x}\right) =$
$36\,000\left(-0,002\mathrm{e}^{-0,002x} + 0,004\mathrm{e}^{-0,004x}\right) = 36\,000 \times 0,002\left(-\mathrm{e}^{-0,002x} + 2\mathrm{e}^{-0,004x}\right) =$
$72\left(-\mathrm{e}^{-0,002x} + 2\mathrm{e}^{-0,004x}\right) = 72\left(-\mathrm{e}^{-0,002x} + 2\mathrm{e}^{2\times(-0,002x)}\right) = 72\left(-\mathrm{e}^{-0,002x} + 2\left[\mathrm{e}^{(-0,002x)}\right]^2\right) =$
$72\mathrm{e}^{-0,002x}\left(-1 + 2\mathrm{e}^{-0,002x}\right) = 72\mathrm{e}^{-0,002x}\left(2\mathrm{e}^{-0,002x} - 1\right)$.

b. $g(x) = 0 \iff 2\mathrm{e}^{-0,002x} - 1 = 0 \iff 2\mathrm{e}^{-0,002x} = 1 \iff \mathrm{e}^{-0,002x} = \dfrac{1}{2}$ et par croissance de la fonction logarithme népérien : $-0,002x = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \iff$
$-0,002x = -\ln 2 \iff x = \dfrac{\ln 2}{0,002} = 500\ln 2$.

c. On « voit » sur le graphique que :

- $g(x) > 0$ sur $[0\,;\,500\ln 2[$;
- $g(500\ln 2) = 0$;
- $g(x) < 0$ sur $]500\ln 2\,;\,1200[$

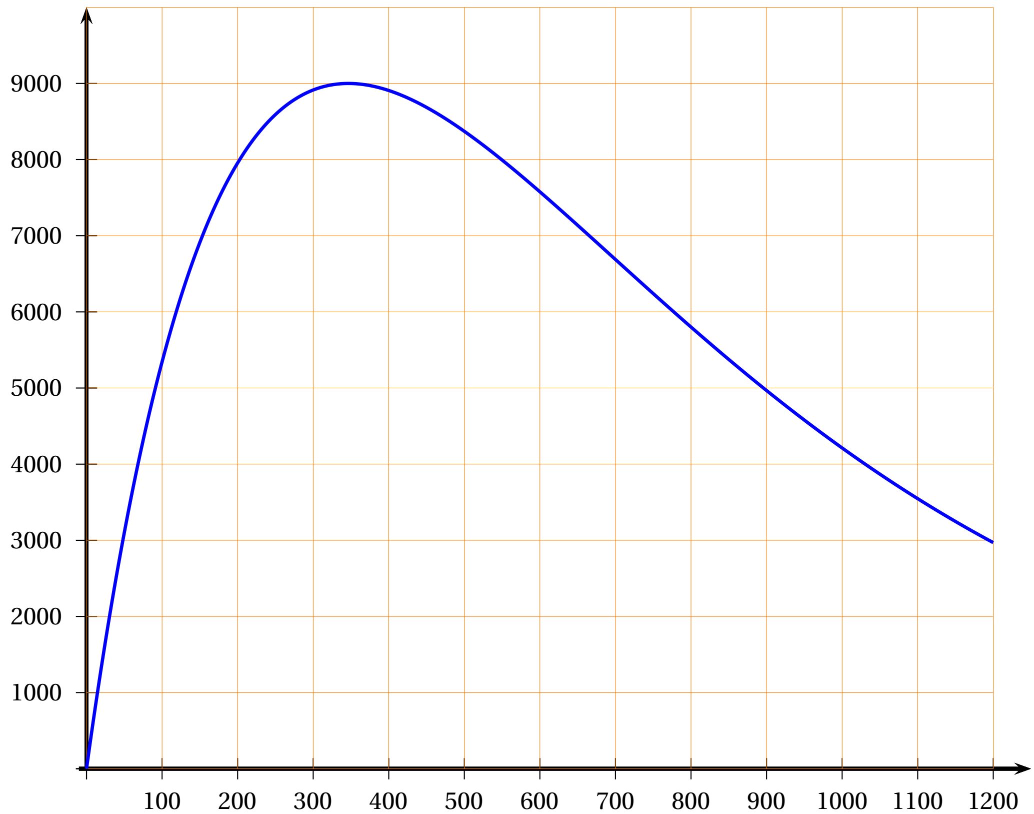
d. Comme $72 > 0$ et que $\mathrm{e}^{-0,002x} > 0$ quel que soit le réel x, le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$.

- $f'(x) > 0$ sur $[0\,;\,500\ln 2[$;
- $f'(500\ln 2) = 0$;
- $f'(x) < 0$ sur $]500\ln 2\,;\,1200[$

e. Le résultat précédent nous permet de conclure :

- f est croissante sur $[0\,;\,500\ln 2[$;
- $f(500\ln 2)$ est un maximum
- f est décroissante sur $]500\ln 2\,;\,1200[$

f.



3. Bilan.

a. Les résultats précédents nous permettent d'affirmer que le volume maximal est égal à $V(500\ln 2) = f(500\ln 2) = 9\,000$

b. La vitesse optimale est égale $500\ln 2 \approx 346,6$ m.min^{-1} ≈ 347 m.min^{-1}.

Partie B

1. $T_0 = \dfrac{100}{350 \times 0,004} = \dfrac{350}{1,4} = 250$ min.

2. $T_{\text{eff}} \approx 1,8 \times 10^7 \times 350^{-2,25} \approx 33,97 \approx 33$ min

3. Le nombre d'outils nécessaires est donc égal à : $\dfrac{350}{33} \approx 10,6$.

Il faudra donc au moins 11 outils.

4. On a $T_{\text{eff}} = 1,8 \cdot 10^7 \times x^{-2,25} = \dfrac{1,8 \cdot 10^7}{x^{2,25}}$.

Plus la vitesse croît et plus la fonction exponentielle $x^{2,25}$ croît, et plus l'usure de l'outil est important : le temps de vie de l'outil est donc inversement proportionnel à la vitesse de coupe ce qui correspond bien à l'intuition.

ANNEXE : courbe représentative de g