Corrigé du baccalauréat STI Polynésie juin 2007
Génie mécanique, énergétique, civil

Exercice 1 **5 points**

1. **a.** $P\left(-2\sqrt{2}\right)=\left(-2\sqrt{2}\right)^3+\left(2\sqrt{2}-4\right)\left(-2\sqrt{2}\right)^2+\left(8-8\sqrt{2}\right)\left(-2\sqrt{2}\right)+16\sqrt{2}=-16\sqrt{2}+8\left(2\sqrt{2}-4\right)-16\sqrt{2}+32+16\sqrt{2}=-16\sqrt{2}+16\sqrt{2}-32-16\sqrt{2}+32+16\sqrt{2}=0.$

   b. $P(z)=z^3+\left(2\sqrt{2}-4\right)z^2+\left(8-8\sqrt{2}\right)z+16\sqrt{2}=\left(z+2\sqrt{2}\right)\left(z^2+\alpha z+\beta\right) \iff z^3+\left(2\sqrt{2}-4\right)z^2+\left(8-8\sqrt{2}\right)z+16\sqrt{2}=z^3+z^2\left(\alpha+\sqrt{2}\right)+\left(\beta+2\alpha\sqrt{2}\right)z+2\beta\sqrt{2} \iff \begin{cases}\alpha+2\sqrt{2} & = & 2\sqrt{2}-4\\ \beta+2\alpha\sqrt{2} & = & 8-8\sqrt{2}\\ 2\beta\sqrt{2} & = & 16\sqrt{2}\end{cases} \iff \begin{cases}\alpha & = & -4\\ 8-4(2\sqrt{2}) & = & 8-8\sqrt{2}\\ \beta & = & 8\end{cases}$

   On a donc $P(z)=\left(z+2\sqrt{2}\right)\left(z^2-4z+8\right)$.

   c. $P(z)=0 \iff \left(z+2\sqrt{2}\right)\left(z^2-4z+8\right)=0 \iff z+2\sqrt{2}=0 \quad \text{ou} \quad z^2-4z+8=0.$

   La première équation a pour solution : c.

   La seconde : $z^2-4z+8=0 \iff (z-2)^2-4+8=0 \iff (z-2)^2+4=0 \iff (z-2)^2-(2\mathrm{i})^2=0 \iff (z-2+2\mathrm{i})(z-2-2\mathrm{i})=0 \iff z=2-2\mathrm{i} \quad \text{ou}$
   $z=2+2\mathrm{i}$.

   $$S=\left\{-2\sqrt{2}\,;\,2-2\mathrm{i}\,;\,2+2\mathrm{i}.\right\}$$

2. **a.** Voir figure à la fin. On a $|a|^2=4\times 2=8$; $|b|^2=4+4=8$; $|c|^2=4+4=8$.
   Donc OA = OB = OC = $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$, ce qui montre que A, B et C appartiennent au cercle centré en O de rayon $2\sqrt{2}$.

   b. On peut écrire $a=2\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

   Un argument de a est donc $\dfrac{\pi}{4}$.

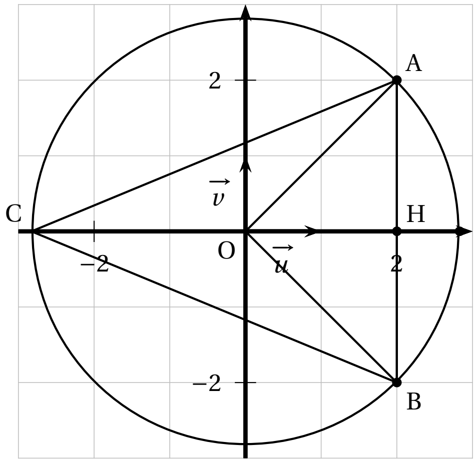
   Comme b est le conjugué de a, un de ses arguments est $-\dfrac{\pi}{4}$.

   $\left(\overrightarrow{\mathrm{OB}}\,,\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)=\left(\overrightarrow{\mathrm{OB}}\,,\,\overrightarrow{u}\right)+\left(\overrightarrow{u}\,,\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)=-\arg(b)-\arg(a)=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}.$

   c. D'après la relation entre l'angle inscrit et l'angle au centre, on a
   $\left(\overrightarrow{\mathrm{CB}}\,,\,\overrightarrow{\mathrm{CA}}\right)=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{\mathrm{OB}}\,,\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{\pi}{4}.$

   d. Comme A et B sont symétriques autour de (OC), cette droite (OC) est la médiatrice de [AB], donc C est équidistant de A et de B : le triangle ACB est isocèle en C; on a donc $\left(\overrightarrow{\mathrm{AC}}\,,\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)=\left(\overrightarrow{\mathrm{BA}}\,,\,\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right)$, d'où dans le triangle ACB, $\left(\overrightarrow{\mathrm{AC}}\,,\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)=\dfrac{\pi-\frac{\pi}{4}}{2}=\dfrac{\frac{3\pi}{4}}{2}=\dfrac{3\pi}{8}.$

   e. Soit H le point de coordonnées (2 ; 0). Le triangle AHC est rectangle en H et on a $\tan\left(\overrightarrow{\mathrm{AC}}\,,\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)=\tan\dfrac{3\pi}{8}=\dfrac{\mathrm{HC}}{\mathrm{AH}}=\dfrac{2+2\sqrt{2}}{2}=1+\sqrt{2}.$



EXERCICE 2 **4 points**

1. Enlever 2 % revient à multiplier par 0,98, donc :
$u_1 = u_0 \times 0,98 = 20 \times 0,98 = 19,6$;
$u_2 = u_1 \times 0,98 = 19,6 \times 0,98 = 19,208 \approx 19,21$;
$u_3 = u_2 \times 0,98 = 19,208 \times 0,98 = 18,8238 \approx 18,82$.
2. On a $u_{n+1} = u_n \times 0,98$: la suite est donc géométrique de raison 0,98 de premier terme $u_0 = 20$.
3. On sait que $u_n = u_0 \times 0,98^n = 20 \times 0,98^n$.
4. On a donc $u_{10} = 20 \times 0,98^{10} \approx 16,34$ cm.
5. Il faut frapper la pièce un nombre naturel n tel que :
$20 \times 0,98^n < 14 \iff 0,98^n < \dfrac{14}{20} \iff 0,98^n < 0,7 \iff n \ln 0,98 < \ln 0,7$ (par croissance de la fonction log
$n > \dfrac{\ln 0,7}{\ln 0,98}$ (car $\ln 0,7$ et par conséquent son inverse sont négatifs), soit finalement $n > 17,6$.
Il faut donc au minimum 18 frappes soit un temps de frappe de $18 \times 6 = 108$ s ou encore 1 min 48 s.

PROBLÈME **11 points**

I. Étude d'une fonction auxiliaire g

1. g est la somme de fonctions dérivables sur $]0~;~+\infty[$ et sur cet intervalle :
$g'(x) = 2x + \dfrac{2}{x} = \dfrac{2x^2+2}{x} = 2\dfrac{x^2+1}{x}$.
2. Tous les termes de la dérivée sont supérieurs à zéro : donc $g'(x) > 0$, ce qui signifie que la fonction f est croissante sur $]0~;~+\infty[$.
3. **a.** On a $g(1) = 1 - 4 + 2\ln 1 = -3 < 0$;
$g(2) = 4 - 4 + 2\ln 2 = 2\ln 2 = \ln 4 > 0$.
Donc sur l'intervalle $[1~;~2]$, la fonction g est croissante, $g(1) < 0$ et $g(2) > 0$: il existe donc un réel unique α de $[1~;~2]$ tel que $f(\alpha) = 0$.
b. La calculatrice donne : $g(1,7) \approx -1,7$ et $g(1,8) \approx 0,4$, donc $1,7 < \alpha < 1,8$;
$g(1,71) \approx -0,003$ et $g(1,72) \approx 0,04$, donc $1,71 < \alpha < 1,72$.

4. La fonction étant croissante sur $]0~;~+\infty[$ et s'annulant en α, on en déduit que :
- sur $]0~;~\alpha[$, $g(x) < 0$;
- sur $]\alpha~;~+\infty[$, $g(x) > 0$.

II. Étude de la fonction f

1. On a $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2}{x} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln x}{x} = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0} -\dfrac{\ln x}{x} = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$.
2. Étude en $+\infty$.
   a. On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$, que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
   b. Soit d la fonction définie sur $]0~;~+\infty[$ par
   $d(x) = f(x) - (x-1) = \dfrac{2}{x} - \dfrac{2\ln(x)}{x}$.
   On a vu que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} d(x) = 0$, ce qui montre que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x - 1$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$ au voisinage de plus l'infini.
   c. $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ ont un point commun commun si $d(x) = 0 \iff \dfrac{2-2\ln x}{x} = 0 \iff 2 - 2\ln x = 0 \iff 1 - \ln x = 0 \iff 1 = \ln x \iff x = \mathrm{e}$. Il existe donc un seul point commun à $\mathcal{C}$ et à la droite $\mathcal{D}$, le point A$(\mathrm{e}~;~\mathrm{e}-1)$.
   d. On a $d(x) > 0 \iff \dfrac{2-2\ln x}{x} > 0 \iff 1 - \ln x > 0 \iff 1 > \ln x \iff x < \ln \mathrm{e}$;
   De même $d(x) < 0 \iff x > \ln \mathrm{e}$.
   Donc sur $]0~;~\mathrm{e}[$, $d(x) > 0$ ce qui signifie que la courbe $\mathcal{C}$ est au dessus de la droite $\mathcal{D}$ et sur $]\mathrm{e}~;~+\infty[$, $d(x) < 0$, ce qui signifie que la courbe $\mathcal{C}$ est au dessous de la droite $\mathcal{D}$.
3. Étude des variations de f.
   a. f est la somme de fonctions dérivables sur $]0~;~+\infty[$ et sur cet intervalle :
   $f'(x) = 1 - \dfrac{2}{x^2} - 2\left(\dfrac{\frac{1}{x}\times x - \ln x}{x^2}\right) = 1 - \dfrac{2}{x^2} - 2\dfrac{1-\ln x}{x^2} = \dfrac{x^2 - 2 - 2 + 2\ln x}{x^2} = \dfrac{x^2 - 4 + 2\ln x}{x^2} = \dfrac{g(x)}{x^2}$.
   b. Comme $x^2 > 0$ si $x > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$ vu à la partie I.
   Donc sur $]0~;~\alpha[$, $f'(x) < 0$: la fonction f est décroissante et
   sur $]\alpha~;~+\infty[$, $f'(x) > 0$: la fonction f est croissante. D'où le tableau :

x	0		e		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↘	$\mathrm{e}-1$	↗	$+\infty$

4. On a : $M(x~;~y) \in \mathcal{T} \iff y - f\left(\mathrm{e}^2\right) = f'\left(\mathrm{e}^2\right)\left(x - \mathrm{e}^2\right)$.
   $f'\left(\mathrm{e}^2\right) = \dfrac{\mathrm{e}^4 - 4 + 2\ln \mathrm{e}^2}{\mathrm{e}^4} = \dfrac{\mathrm{e}^4}{\mathrm{e}^4} = 1$.
   $f\left(\mathrm{e}^2\right) = \mathrm{e}^2 - 1 + \dfrac{2}{\mathrm{e}^2} - \dfrac{2\ln \mathrm{e}^2}{\mathrm{e}^2} = \mathrm{e}^2 - 1 + \dfrac{2}{\mathrm{e}^2} - \dfrac{4}{\mathrm{e}^2} = \mathrm{e}^2 - 1 - \dfrac{2}{\mathrm{e}^2}$.
   Donc $M(x~;~y) \in \mathcal{T} \iff y - \mathrm{e}^2 + 1 + \dfrac{2}{\mathrm{e}^2} = 1\left(x - \mathrm{e}^2\right) \iff y = x - 1 - \dfrac{2}{\mathrm{e}^2}$.
   Cette tangente a le même coefficient directeur que la droite $\mathcal{D}$.

5. Voir en bas.

III. Calcul d'une aire

1. H est dérivable sur $]0~;~+\infty[$ et sur cet intervalle :
$H'() = x - 1 + \dfrac{2}{x} - 2\ln x \times \dfrac{1}{x} = x - 1 + \dfrac{2}{x} - \dfrac{2\ln x}{x} = f(x)$.
H est donc une primitive de f sur $]0~;~+\infty[$

2. a. Voir la figure

b. Le minimum de f est $\text{e} - 1 \approx 1,728 > 0$; la fonction f est donc positive non nulle.
L'aire en unité d'aire de la partie $\mathcal{E}$ est donc égale à l'intégrale :
$\displaystyle\int_1^{\text{e}} f(x)\,\text{d}x = [H(x)]_1^{\text{e}} = H(\text{e}) - H(1) = \dfrac{\text{e}^2}{2} - \text{e} + 2\ln \text{e} - (\ln \text{e})^2 - \left(\dfrac{1^2}{2} - 1 + 2\ln 1 - (\ln 1)^2\right) =$
$\dfrac{\text{e}^2}{2} - \text{e} + 2 - 1 - \dfrac{1}{2} + 1 = \dfrac{\text{e}^2}{2} - \text{e} + \dfrac{1}{2}$ (u. a.)

c. L'unité d'aire est égale à $2 \times 2 = 4$ cm^2, donc $S = 4\left(\dfrac{\text{e}^2}{2} - \text{e} + \dfrac{1}{2}\right) = 2 + 2\text{e}^2 -$
$4\text{e} \approx 5,904 \approx 5,90$ cm^2 au mm^2 près.