**Durée : 4 heures**

# ∽ Corrigé du baccalauréat STI Polynésie juin 2010 ∽ Génie mécanique, énergétique, civil

**EXERCICE 1** **5 points**

1. **a.** On a $|a|^2 = 1+1 = 2 \Rightarrow |a| = \sqrt{2}$.
   Donc $a = \sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.
   On reconnaît le cosinus et le sinus de $\frac{\pi}{4}$.
   Un argument de $a$ est donc $\dfrac{\pi}{4}$ et $a$ peut s'écrire : $a = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}}$.
   $b = a \times 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} \times 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} = 2\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)} = 2\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{12}}$.
   Le module de $b$ est $2\sqrt{2}$ et un argument de $b$ est $\frac{7\pi}{12}$.
   $|c|^2 = 3+3 = 6 \Rightarrow |c| = \sqrt{6}$.
   On peut donc, en factorisant ce modèle écrire
   $c = \sqrt{6}\left(-\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{3}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.
   On reconnaît le cosinus et le sinus de $\frac{3\pi}{4}$. Un argument de $c$ est donc $\dfrac{3\pi}{4}$.

   **b.** On a $b = a \times 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} = (1+\mathrm{i}) \times 2 \times \left(\cos\frac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2(1+\mathrm{i})\left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$
   $(1+\mathrm{i})(1+\mathrm{i}\sqrt{3}) = 1-\sqrt{3} + \mathrm{i}\left(1+\sqrt{3}\right)$.

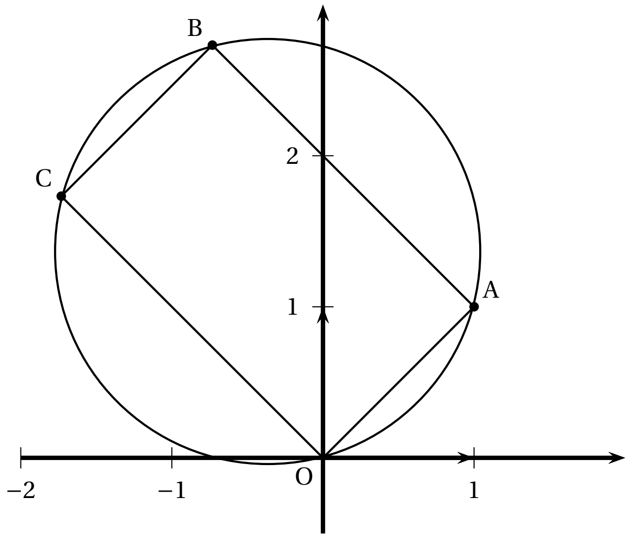
   **c.** On a vu que $b = 2\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{12}} = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12} + \mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{12}\right)$ et on vient de voir que $b = 1-\sqrt{3} + \mathrm{i}\left(1+\sqrt{3}\right)$, donc par identification des parties réelles :
   $\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right) = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$.

   **d.** Voir à la fin.

2. **a.** On a $\mathrm{OA}^2 = 2$ et $\mathrm{OB}^2 = \left(2\sqrt{2}\right)^2 = 8$.
   $\mathrm{AB}^2 = |z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}}|^2 = \left|1-\sqrt{3}+\mathrm{i}\left(1+\sqrt{3}\right) - (1+\mathrm{i})\right|^2 = \left|-\sqrt{3}+\mathrm{i}\sqrt{3}\right|^2 = 3+3 = 6$.
   Or $2+6 = 8 \iff \mathrm{OA}^2 + \mathrm{AB}^2 = \mathrm{OB}^2 \iff$ OAB est un triangle rectangle en A d'après la réciproque du théorème de Pythagore.

   **b.** OAB est un triangle rectangle : il est donc inscrit dans le cercle centré au milieu de son hypoténuse [OB] dont les coordonnées sont donc
   $\left(\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\ ;\ \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$.
   On sait de plus que [OB] est un diamètre de ce cercle ; comme $\mathrm{OB} = 2\sqrt{2}$, le rayon du cercle mesure $\sqrt{2}$.

3. Le milieu du segment [AC] a pour coordonnées : $\left(\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\ ;\ \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$ : c'est donc le centre du cercle donc le milieu du diamètre [OB].
   Conclusion : le quadrilatère OABC a ses diagonales qui ont le même milieu, c'est donc un parallélogramme ; de plus il a un angle droit : c'est donc un rectangle inscrit dans le cercle précédent. Donc C appartient à ce cercle.




**EXERCICE 2** **4 points**

1. $X'' + 100X = 0 \iff X'' = -100X$ : on sait que les solutions de cette équation différentielle sont définies par $f(t) = A\cos 10t + B\sin 10t$, avec $A$ et $B$ réels quelconques.
2. Les solutions vérifient $f'(t) = -10A\sin 10t + 10B\cos 10t$.
Donc $\left\{\begin{array}{lcl} X(0) & = & 10^{-1}\\ X'(0) & = & 1\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} A & = & 10^{-1}\\ 10B & = & 1\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} A & = & 10^{-1}\\ B & = & 10^{-1}\end{array}\right.$
La solution particulière est donc $X(t) = 10^{-1}\cos 10t + 10^{-1}\sin 10t$.
3. On a $X(t) = 10^{-1}\cos 10t + 10^{-1}\sin 10t = 10^{-1}(\cos 10t + \sin 10t) =$
$10^{-1}\times\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos 10t + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin 10t\right) = 10^{-1}\times\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos 10t + \sin\frac{\pi}{4}\sin 10t\right) =$
$10^{-1}\sqrt{2}\cos\left(10t - \dfrac{\pi}{4}\right)$, d'après la formule :
$\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$, quels que soient $a$ et $b$.
4. On a $W(t) = 10^{-1}[X'(t)]^2 + 10[X(t)]^2 =$
$10^{-1}\times\left(\sqrt{2}\sin\left(10t - \dfrac{\pi}{4}\right)\right)^2 + 10\times 10^{-2}\times 2\times\cos^2\left(10t - \dfrac{\pi}{4}\right) =$
$0,2\sin^2\left(10t - \dfrac{\pi}{4}\right) + 0,2\cos^2\left(10t - \dfrac{\pi}{4}\right) = 0,2.$
5. La valeur moyenne de la fonction $X$ sur l'intervalle $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{10}\right[$ est égale à :
$\dfrac{1}{\frac{\pi}{10} - 0}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{10}} f(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{10}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{10}} 10^{-1}\sqrt{2}\cos\left(10t - \dfrac{\pi}{4}\right)\,\mathrm{d}t =$
$\dfrac{10}{\pi}\left[10^{-1}\sqrt{2}\times\dfrac{1}{10}\sin\left(10t - \dfrac{\pi}{4}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{10}} = \dfrac{10}{\pi}\times 10^{-1}\sqrt{2}\times 10^{-1}\left[\sin\left(\pi - \dfrac{\pi}{4}\right) - \sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right] =$
$\dfrac{1}{10\pi}\sqrt{2}\left[\sin\dfrac{3\pi}{4} - \sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right] = \dfrac{1}{10\pi}\sqrt{2}\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right] = \dfrac{\sqrt{2}}{10\pi}\times\sqrt{2} = \dfrac{1}{5\pi}.$

**PROBLÈME** **11 points**

**Partie A : détermination de la fonction *f***

1. On a $f(0) = 1,\ f(1) = 1,\ f(2) = -1.$

**2.** On a $\left\{\begin{array}{l c l} f(0) & = & 1\\ f(1) & = & 1\\ f(2) & = & -1\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l c l} c & = & 1\\ (a+b)\mathrm{e}+c & = & 1\\ (2a+4b)+c & = & -1\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l c l} c & = & 1\\ (a+b)\mathrm{e} & = & 0\\ (2a+4b) & = & -2\end{array}\right.$

$\iff \left\{\begin{array}{l c l} c & = & 1\\ a+b & = & 0\\ (a+2b) & = & -1\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l c l} c & = & 1\\ b & = & -a\\ a-2a & = & -1\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l c l} c & = & 1\\ b & = & -1\\ a & = & 1\end{array}\right.$

Conclusion : $f(x) = \left(x - x^2\right)\mathrm{e}^{(-x+2)} + 1$.

**Partie B : étude de la fonction $f$**

**1.** $f(x) = x\mathrm{e}^{(-x+2)} - x^2\mathrm{e}^{(-x+2)} + 1$.
On sait que $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^{(-x+2)} = -\infty$, et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} -x^2\mathrm{e}^{(-x+2)} = -\infty$ donc par somme de limites, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

**a.** On a $\mathrm{e}^{(-x+2)} = \mathrm{e}^{(-x)} \times \mathrm{e}^{(2)}$, donc
$f(x) = \mathrm{e}^{(2)}\left(x - x^2\right)\mathrm{e}^{(-x)} + 1 = \mathrm{e}^2\left(x\mathrm{e}^{-x} - x^2\mathrm{e}^{-x}\right) + 1$.

**b.** On sait que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^n\mathrm{e}^{(-x+2)} = 0$, quel que soit le naturel $n$, donc
$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$.

**c.** Géométriquement le résultat précédent signifie que la droite d'équation $y = 1$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ au voisinage de plus l'infini.

$f$ produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ est dérivable et sur cet intervalle :
$f'(x) = (1-2x)\mathrm{e}^{(-x+2)} + (-1)\times\left(x - x^2\right)\mathrm{e}^{(-x+2)} = \left(1 - 2x - x + x^2\right)\mathrm{e}^{(-x+2)} = \left(x^2 - 3x + 1\right)\mathrm{e}^{(-x+2)}$.

**3.** On sait que quel que soit le réel $x$, $\mathrm{e}^{(-x+2)} > 0$, donc le signe de $f'(x)$ est celui du trinôme $x^2 - 3x + 1$.
Comme $\Delta = 9 - 4 = 5 > 0$, ce trinôme a deux racines : $\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$.
Ce trinôme est positif sauf entre les racines, donc :
$f'(x) > 0$ sur $\left]-\infty\,;\,\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right[ \cup \left]\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\,;\,+\infty\right[$ ; la fonction est croissante
$f'(x) < 0$ sur $\left]\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\,;\,\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right[$ ; la fonction est décroissante

**4. a.** Il faut résoudre l'équation :
$f(x) = 1 \iff \left(x - x^2\right)\mathrm{e}^{(-x+2)} + 1 = 1 \iff \left(x - x^2\right)\mathrm{e}^{(-x+2)} = 0 \iff x - x^2 = 0$ (car $\mathrm{e}^{(-x+2)} \neq 0$) $\iff x(1-x) = 0 \iff x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 1$.
Il y a donc deux points communs, les point de cordonnées $(0\,;\,1)$ et $(1\,;\,1)$.

**b.** Soit $d$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $d(x) = f(x) - 1 = \left(x - x^2\right)\mathrm{e}^{(-x+2)}$.
Comme $\mathrm{e}^{(-x+2)} > 0$, le signe de $d(x)$ est celui de $x - x^2 = x(1-x)$, trinôme qui est négatif sauf entre ses racines 0 et 1.
Donc si $0 < x < 1$, $\quad d(x) > 0$, ce qui signifie que la courbe est au dessus de $\Delta$. La courbe est au dessous de $\Delta$ ailleurs.

**5. a.** On a $f(-1) = -2\mathrm{e}^3 + 1 \approx -39$ et $f(0) = 1$. La fonction $f$ étant dérivable, il existe un réel unique $\alpha$ tel que $f(\alpha) = 0$ avec $0 < \alpha 1$.

**b.** La calculatrice donne $-0,2 < \alpha < -0,1$, puis $-0,11 < \alpha < -0,10$.

**Partie C : calcul d'une aire**

**1.** $G$ produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ est dérivable et sur $\mathbb{R}$,
$G'(x) = (2x+1)\mathrm{e}^{(-x+2)} - \left(x^2 + x + 1\right)\mathrm{e}^{(-x+2)} = \left(2x + 1 - x^2 - x - 1\right)\mathrm{e}^{(-x+2)} = \left(-x^2 + x\right)\mathrm{e}^{(-x+2)} = f(x) - 1$.
On a donc $f(x) = G(x) + 1$.

**2.** On a vu que sur l'intervalle $[0\,;\,1]$, la fonction $f$ est positive, donc l'aire du domaine $\mathcal{D}$ est égale à l'intégrale :
$\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 [G'(x)+1]\,\mathrm{d}x = [G(x)+x]_0^1 =$
$\left(1^2+1+1\right)\mathrm{e}^{(-1+2)}+1-\left[\left(0^2+0+1\right)\mathrm{e}^{(-0+2)}+0\right] = 1+3\mathrm{e}-\mathrm{e}^2$ unité d'aire soit à peu près $1,8$ à 0,1 près. (ce que l'on vérifie approximativement sur la figure)

## Annexe (problème)