Durée : 4 heures

Baccalauréat STI Polynésie septembre 2011
Génie mécanique, énergétique, civil

EXERCICE 1 **4 points**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$. On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.
On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives

$$a = 2\sqrt{3} - 2\mathrm{i}, \quad b = -2 - 2\mathrm{i}\sqrt{3}, \quad c = -4 \quad \text{et} \quad d = 4\mathrm{i}$$

.

1. **a.** Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes a et b.
   b. Placer les points A, B, C et D dans le plan muni du repère $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$ d'unité graphique 1 cm.
2. **a.** Montrer que les points A, B, C et D sont un même cercle dont on déterminera le centre et le rayon.
   b. Vérifier que $d - a = \sqrt{3}(c - b)$.
   c. Calculer les distances AB et CD.
   d. Déduire des questions 2. b. et 2. c. que le quadrilatère ABCD est un trapèze isocèle.

EXERCICE 2 **5 points**

On considère l'équation différentielle notée (E) :

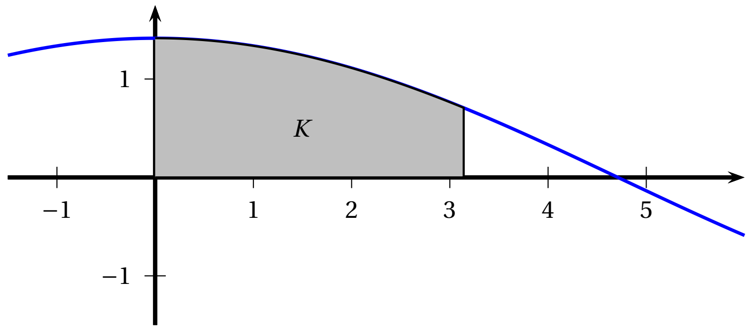
$$y'' + \frac{1}{9}y = 0,$$

où y désigne une fonction de la variable réelle définie et deux fois dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels et où y'' désigne sa dérivée seconde.

1. Résoudre l'équation différentielle (E).
2. Déterminer l'expression de la fonction f solution de l'équation différentielle (E) qui vérifie les conditions $f\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) = 1$ et $f'(3\pi) = 0$.
3. On considère la fonction g définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :

$$g(x) = \sqrt{2}\cos\left(\frac{1}{3}x\right).$$

   On donne ci-dessous la représentation graphique de la fonction g, dans un repère orthogonal du plan. On note K la partie du plan comprise entre la courbe représentative de la fonction g, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = \pi$.



a. Justifier que pour tout nombre réel x, $[g(x)]^2 = 1 + \cos\left(\dfrac{2}{3}x\right)$.

b. On considère le solide S engendré par La rotation de la partie K autour de l'axe des abscisses. Calculer la valeur exacte, en unité de volume, du volume V du solide S.
On rappelle que : $V = \pi \displaystyle\int_0^{\pi} [g(x)]^2\, \mathrm{d}x$.

PROBLÈME **11 points**

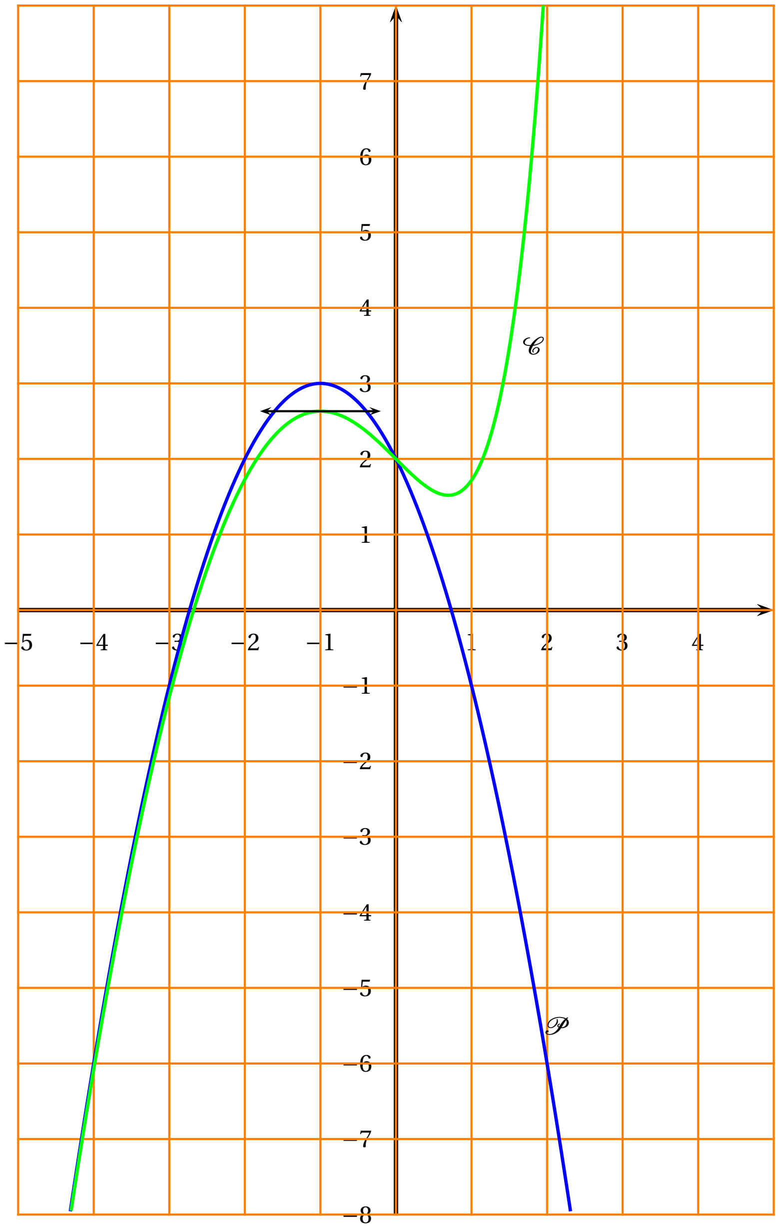
Partie A : exploitation d'un graphique

Le plan est muni d'un repère orthogonal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
La courbe $\mathscr{C}$ ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :

$$f(x) = x\mathrm{e}^x + ax^2 + bx + c,$$

où a, b et c désignent trois nombres réels. On note f' la fonction dérivée de f sur $\mathbb{R}$.
Cette courbe $\mathscr{C}$ passe par les points $\text{A}(0\,;2)$ et $\text{B}\left(-1\,;\,3 - \mathrm{e}^{-1}\right)$.
Au point B, la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ est parallèle à l'axe des abscisses.
La parabole $\mathscr{P}$ représente la fonction g définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :

$$g(x) = -x^2 - 2x + 2.$$



1. **a.** Donner la valeur de $f(0)$. En déduire la valeur de c.

   b. Donner la valeur de $f(-1)$. En déduire une relation entre a et b.

2. **a.** Donner la valeur de $f'(-1)$.

   b. Exprimer $f'(x)$ en fonction de a et de b. En déduire une deuxième relation entre a et b.

3. À l'aide des questions 1. b. et 2. b., déterminer les valeurs de a et de b

Dans la suite, on admettra que pour tout nombre réel x, $f(x)$ s'exprime par :

$$f(x) = x\mathrm{e}^x - x^2 - 2x + 2.$$

Partie B

1. **a.** Vérifier que $f(x)$ peut se mettre sous la forme $x\left(\mathrm{e}^x - x - 2\right) + 2$.

   b. Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.

c. Déterminer, lorsque x tend vers $-\infty$, la limite de $f(x) - g(x)$.
Interpréter graphiquement le résultat.

d. Étudier les positions relatives des courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{P}$.

2. **a.** Vérifier que $f(x)$ peut se mettre sous la forme $x^2\left(\dfrac{\text{e}^x}{x} - \dfrac{2}{x} - 1\right) + 2$.

b. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

3. **a.** Établir que pour tout nombre réel x, $f'(x) = (x+1)\left(\text{e}^x - 2\right)$.

b. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels l'inéquation : $\text{e}^x - 2 > 0$.

c. Déterminer le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs du nombre réel x.

d. Dresser le tableau de variation de la fonction f.
On donnera la valeur exacte de $f(\ln 2)$.

Partie C : calcul d'aire

On considère les fonctions H et h définies sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :

$$H(x) = (x-1)\text{e}^x \quad \text{et} \quad h(x) = x\text{e}^x.$$

1. Montrer que la fonction H est une primitive de la fonction h sur $\mathbb{R}$.

2. Calculer l'aire du domaine du plan délimité par la courbe $\mathscr{C}$, la parabole $\mathscr{P}$ et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = \ln 2$. Le résultat sera exprimé en unité d'aire.