Durée : 4 heures

Corrigé du baccalauréat STI Polynésie septembre 2011 Génie mécanique, énergétique, civil

EXERCICE 1 **4 points**

1. **a.** Le module : $|a|^2 = 4 \times 3 + 4 = 16 = 4^2 \Rightarrow |a| = 4$. En factorisant ce module dans l'écriture algèbrique :
$a = 4\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \text{i}\dfrac{1}{2}\right) = 4\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + \text{i}\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$.
Un argument de a est donc $\dfrac{\pi}{6}$.
De même $|b|^2 = 4 + 4 \times 3 = 16 = 4^2 \Rightarrow |B| = 4$.
$b = 4\left(-\dfrac{1}{2} + \text{i}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) = 4\left(\cos\dfrac{-2\pi}{3} + \text{i}\sin\dfrac{-2\pi}{3}\right)$.
Un argument de b est donc $\dfrac{-2\pi}{3}$

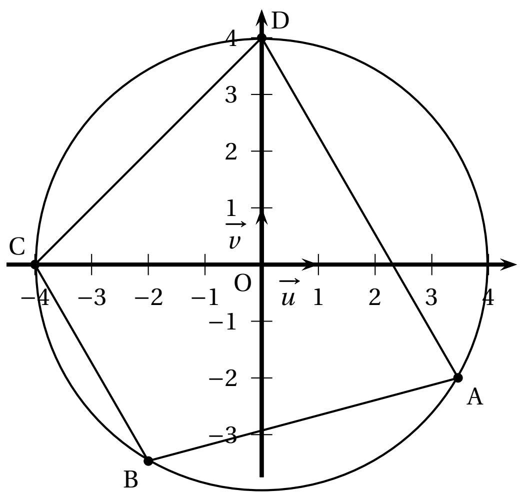
   b. Voir à la fin.

2. **a.** On a $|c| = 4 = \text{OC} = |d| = 4 = \text{OD}$ et on déjà vu que $|a| = |b| = 4 = \text{OA} = \text{OB}$.
Les quatre points A, B, C et D appartiennent au cercle de centre O et de rayon 4.

   b. $d - a = 4\text{i} - \left(2\sqrt{3} - 2\text{i}\right) = 6\text{i} - 2\sqrt{3} = \sqrt{3}\left(2\text{i}\sqrt{3} - 2\right)$.
Or $c - b = -4 - \left(-2 - 2\text{i}\sqrt{3}\right) = -2 + 2\text{i}\sqrt{3}$.
Finalement : $d - a = \sqrt{3}(c - b)$.

   c. On a $\text{AB}^2 = |b - a|^2 = \left|-2 - 2\sqrt{3} + \text{i}\left(2 - 2\sqrt{3}\right)\right|^2 = \left(2 + 2\sqrt{3}\right)^2 + \left(2 - 2\sqrt{3}\right)^2 = 4 + 12 + 8\sqrt{3} + 4 + 12 - 8\sqrt{3} = 16 \times 2$ D'où $\text{AB} = 4\sqrt{2}$.
$\text{CD}^2 = |4\text{i} + 4|^2 = 16 + 16 = 16 \times 2 \Rightarrow \text{CD} = 4\sqrt{2}$.

   d. Le résultat du 2. b. traduit l'égalité vectorielle $\overrightarrow{\text{AD}} = \sqrt{3}\overrightarrow{\text{BC}}$ ce qui signifie que les vecteurs $\overrightarrow{\text{AD}}$ et $\overrightarrow{\text{BC}}$ sont colinéaires ou encore que les droites (AD) et (BC) sont parallèles. Le quadrilatère ABCD est donc un trapèze et comme on vient de démontrer que AB = CD, ce trapèze est isocèle.



EXERCICE 2 **5 points**

1. L'équation est de la forme $y'' + \omega^2 y = 0$ avec $\omega = \dfrac{1}{3}$.

Les solutions sur l'ensemble $\mathbb{R}$ sont de la forme :
$f(x) = A\cos\dfrac{x}{3} + B\sin\dfrac{x}{3}$, avec A et B réels.

2. Avec f(x) = A cos $\dfrac{x}{3} + B\sin\dfrac{x}{3}$, $\quad f'(x) = -\dfrac{A}{3}\sin\dfrac{x}{3} + \dfrac{B}{3}\cos\dfrac{x}{3}$, on a :

$$\left\{\begin{array}{lcl} f\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) & = & 1\\ f'(3\pi) & = & 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} A\cos\dfrac{3\pi}{3\times 4} + B\sin\dfrac{3\pi}{3\times 4} & = & 1\\ -\dfrac{A}{3}\sin\dfrac{3\pi}{3} + \dfrac{B}{3}\cos\dfrac{3\pi}{3} & = & 0\end{array}\right. \iff A\dfrac{\sqrt{2}}{2} + B\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 1$$

$$-\dfrac{B}{3} = 0 \iff \left\{\begin{array}{lcl} A+B & = & \sqrt{2}\\ B & = & 0\end{array}\right. \iff A = \sqrt{2}$$

$B = 0(0)$

La solution particulière est donc définie par :
$f(x) = \sqrt{2}\cos\dfrac{x}{3}$

1. On a : $[g(x)]^2 = \left[\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{1}{3}x\right)\right]^2 = 2\cos^2\left(\dfrac{1}{3}x\right)$.

On sait que $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1$, soit en isolant $2\cos^2 a$:

$2\cos^2 a = 1 + \cos a$. En appliquant cette formule à $a = \dfrac{1}{3}x$, on obtient :

$[g(x)]^2 = 1 + \cos\dfrac{2}{3}x$.

2. $V = \pi\displaystyle\int_0^{\pi} [g(x)]^2\,\mathrm{d}x = \pi\int_0^{\pi}\left[1 + \cos\dfrac{2}{3}x\right]\,\mathrm{d}x = \pi\int_0^{\pi} 1\,\mathrm{d}x + \pi\int_0^{\pi}\cos\dfrac{2}{3}x\,\mathrm{d}x$.

Une primitive de $\cos\dfrac{2}{3}x$ est $\dfrac{3}{2}\sin\dfrac{2}{3}x$, donc

$V = \pi[x]_0^{\pi} + \pi\left[\dfrac{3}{2}\sin\dfrac{2}{3}x\right]_0^{\pi} = \pi^2 + \pi\dfrac{3}{2}\sin\dfrac{2\pi}{3} = \pi^2 + \dfrac{3\pi}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \pi^2 + \dfrac{3\pi\sqrt{3}}{4}$.

PROBLÈME **11 points**

Partie A : exploitation d'un graphique

1. a. On sait que $f(0) = 2$ et avec $f(x) = x\mathrm{e}^x + ax^2 + bx + c$,
$f(0) = 2 \iff 0 + 0 + 0 + c = 2 \iff c = 2$.

b. On a $f(-1) = 3 - \mathrm{e}^{-1}$.
Soit $-1\mathrm{e}^{-1} + a(-1)^2 + b\times(-1) + 2 = 3 - \mathrm{e}^{-1} \iff a - b + 2 = 3 \iff a - b = 1$.

2. a. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et
$f'(x) = \mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x + 2ax + b = \mathrm{e}^x(x+1) + 2ax + b$, donc
$f'(-1) = 0 - 2a + b = 0 \iff b = 2a$.

b. Exprimer $f'(x)$ en fonction de a et de b. En déduire une deuxième relation entre a et b.

3. $\left\{\begin{array}{lcl} a-b & = & 1\\ -2a+b & = & 0\end{array}\right. \Rightarrow$ (par somme) $-a = 1 \iff a = -1$ et enfin $b = -2$.

Conclusion f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x\mathrm{e}^x - x^2 - 2x + 2.$$

Partie B

1. a. En factorisant x, on a $f(x) = x\left[\mathrm{e}^x - x - 2\right] + 2$.

b. On sait que $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$, que $\lim\limits_{x\to-\infty} -x = +\infty$, d'où par somme $\lim\limits_{x\to-\infty} \left[e^x - x - 2\right] = +\infty$ et enfin par produit de limites car $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$. (ce que confirme le graphe)

c. $f(x)-g(x) = xe^x - x^2 - 2x + 2 - \left(-x^2 - 2x + 2\right) = xe^x$ et on sait que $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - g(x) = 0$. Géométriquement ce résultat signifie que la courbe $\mathscr{P}$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ au voisinage de moins l'infini.

d. $f(x) - g(x) = xe^x$ et comme $e^x > 0$ quel que soit le réel x, le signe de la différence est celui de x :

- pour $x < 0$, $f(x) - g(x) < 0 \iff f(x) < g(x)$, donc $\mathscr{C}$ est au dessous de $\mathscr{P}$;
- pour $x > 0$, $f(x) - g(x) > 0 \iff f(x) > g(x)$, donc $\mathscr{C}$ est au dessus de $\mathscr{P}$;
- pour $x = 0$, les deux courbes ont un point commun A.

2. a. En factorisant x^2 dans l'écriture de f(x) on obtient :
$f(x) = x^2\left(\dfrac{e^x}{x} - \dfrac{2}{x} - 1\right) + 2.$

b. On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$, que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} - \dfrac{2}{x} - 1 = +\infty$.
D'autre part $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$, donc par produit de limites
$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(\dfrac{e^x}{x} - \dfrac{2}{x} - 1\right) + 2 = +\infty.$

3. a. f somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :
$f'(x) = e^x + xe^x - 2x - 2 = e^x(x+1) - 2(x+1) = (x+1)\left(e^x - 2\right).$

b. $e^x - 2 > 0 \iff e^x > 2 \iff x > \ln 2$ (par croissance de la fonction logarithme népérien)

c. On vient de trouver le signe de $e^x - 2$ et on a $x + 1 > 0 \iff x > -1$.
On peut trouver le signe de $f'(x)$ grâce à un tableau de signes :

x	$-\infty$		-1		$\ln 2$		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$e^x - 2$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x+1)\left(e^x-2\right)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

d. Le signe de $(x+1)\left(e^x - 2\right)$ étant celui de la dérivée, on en déduit le tableau de variations de la fonction f :

x	$-\infty$		-1		$\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$3 - e^{-1}$	$\searrow$	$2 - (\ln 2)^2$	$\nearrow$	$+\infty$

$f(\ln 2) = \ln 2 e^{\ln 2} - (\ln 2)^2 - 2\ln 2 + 2 = 2\ln 2 - (\ln 2)^2 - \ln 2 + 2 = 2 - (\ln 2)^2.$

Partie C : calcul d'aire

1. H est un produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$: elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et
$H'(x) = \text{e}^x + (x-1)\text{e}^x = \text{e}^x(1+x-1) = x\text{e}^x = h(x)$.
Cette égalité montre que la fonction H est une primitive de la fonction h sur $\mathbb{R}$.
2. On a vu que pour $x > 0$ et en particulier sur $[0\,;\,\ln 2]$, $f(x) > g(x)$, donc l'aire du domaine du plan délimité par la courbe $\mathscr{C}$, la parabole $\mathscr{P}$ et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = \ln 2$ est égale à l'intégrale :
$\displaystyle\int_0^{\ln 2} [f(x)-g(x)]\,\text{d}x = \int_0^{\ln 2} x\text{e}^x\,\text{d}x = \int_0^{\ln 2} h(x)\,\text{d}x = [H(x)]_0^{\ln 2} = H(\ln 2)-H(0) =$
$(\ln 2-1)\text{e}^{\ln 2} - (0-1)\text{e}^0 = 2(\ln 2-1)+1$ (u. a.)