Durée : 4 heures

Corrigé du baccalauréat STI La Réunion 15 juin 2007
Génie mécanique, énergétique, civil

EXERCICE 1 **5 points**

1. $\Delta = \left(4\sqrt{3}\right)^2 - 4 \times 16 = 48 - 64 = -16 = (4\text{i})^2$; l'équation a donc deux solutions complexes conjuguées :

$$\frac{4\sqrt{3}+4\text{i}}{2} = 2\sqrt{3}+2\text{i} \quad \text{et} \quad 2\sqrt{3}-2\text{i}$$

2. a. $|z_{\text{A}}|^2 = \left|2\sqrt{3}-2\text{i}\right|^2 = 12+4 = 16 = 4^2 \Rightarrow |z_{\text{A}}| = 4$.

On peut écrire $z_{\text{A}} = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2})\text{i}\frac{1}{2}\right) = 4\left(\cos -\frac{\pi}{6} + \text{i}\sin -\frac{\pi}{6}\right)$.

Un argument de z_{A} est donc $-\dfrac{\pi}{6}$.

Comme z_{B} est le conjugué de z_{A}, son module est égal à 4 et un de ses arguments à $\dfrac{\pi}{6}$.

b. Le point A est à l'intersection du cercle centré en O de rayon 4 et de la droite d'équation $y = -2$ et B à l'intersection du cercle centré en O de rayon 4 et de la droite d'équation $y = 2$.

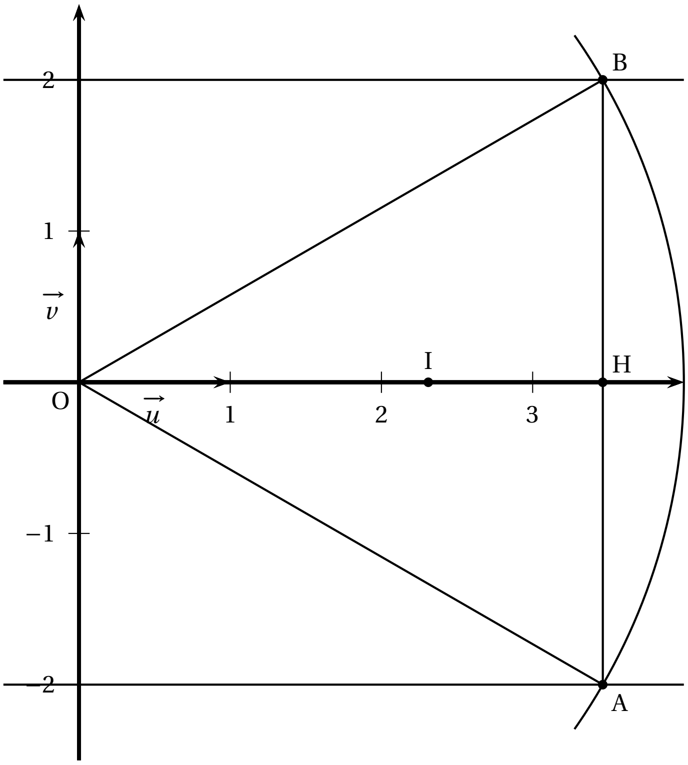
c. $\left(\overrightarrow{\text{OA}}\ ;\ \overrightarrow{\text{OB}}\right) = \left(\overrightarrow{\text{OA}}\ ;\ \overrightarrow{u}\right) + \left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{\text{OB}}\right) = -\arg(z_{\text{A}}) + \arg(z_{\text{B}}) = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{3}$.

d. On sait déjà que OA = OB donc que OAB est isocèle en O, et comme $\left(\overrightarrow{\text{OA}}\ ;\ \overrightarrow{\text{OB}}\right) = \dfrac{\pi}{3}$, les trois angles ont mesure $\dfrac{\pi}{3}$: OAB est donc équilatéral.

e. Soit H le projeté orthogonal de A (ou de B) sur l'axe des abscisses ; il a pour coordonnées $(2\sqrt{3}\ ;\ 0)$; donc $\text{OH} = 2\sqrt{3}$.

On sait que le centre du cercle circonscrit au triangle équilatéral OAB est aussi l'orthocentre et le centre de gravité de ce triangle ; ce centre de gravité est situé sur la médiane [OH] aux 2/3 sur cette médiane à partir de O.

Donc à une distance de $\dfrac{2}{3} \times 2\sqrt{3} = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$. Ce centre de gravité est donc le point I.



EXERCICE 2 **4 points**

1. $\dfrac{1}{4}y'' + 9y = 0 \iff y'' + 36y = 0.$
   On sait que les solutions de cette équation sont de la forme $f(x) = A\cos 6x + B\sin 6x,\ A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R}.$
2. La dérivée des fonctions solutions est : $f'(x) - 6A\sin 6x + 6B\cos 6x$;
   $$\left\{\begin{array}{lcl} f\left(\dfrac{\pi}{6}\right) & = & -\dfrac{1}{2}\\ f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right) & = & 3\sqrt{3}\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} A\cos\pi + B\sin\pi & = & -\dfrac{1}{2}\\ -6A\sin\pi + 6B\cos\pi & = & 3\sqrt{3}\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} -A & = & -\dfrac{1}{2}\\ -6B & = & 3\sqrt{3}\end{array}\right. \iff$$
   $$\left\{\begin{array}{lcl} A & = & \dfrac{1}{2}\\ B & = & -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right.$$
   La solution particulière est donc définie par :
   $f(x) = \dfrac{1}{2}\cos 6x - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 6x.$
3. **a.** La solution précédente peut s'écrire :
   $f(x) = \cos -\frac{\pi}{3}\cos 6x + \sin -\frac{\pi}{3}\sin 6x = \cos\frac{\pi}{3}\cos 6x - \sin\frac{\pi}{3}\sin 6x = \cos\left(6x + \frac{\pi}{3}\right).$
   b. $f(x) = 0 \iff \cos\left(6x + \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Rightarrow 6x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \iff 6x = \frac{\pi}{6} + k\pi \iff x = \frac{\pi}{36} + k\frac{\pi}{6}.$
4. La valeur moyenne μ de la fonction f sur l'intervalle $\left[-\dfrac{5\pi}{36}\ ;\ \dfrac{\pi}{36}\right]$ est égale à :
   $\mu = \dfrac{1}{\frac{\pi}{36} + \frac{5\pi}{36}}\displaystyle\int_{-\frac{5\pi}{36}}^{\frac{\pi}{36}} f(x)\,\mathrm{d}x = \left[\dfrac{6}{\pi}\sin\left(6x + \dfrac{\pi}{3}\right)\right]_{-\frac{5\pi}{36}}^{\frac{\pi}{36}} = \dfrac{6}{\pi}\sin\left(\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{3}\right) - \dfrac{6}{\pi}\sin\left(-\dfrac{5\pi}{6} + \dfrac{\pi}{3}\right) =$
   $\dfrac{6}{\pi}\sin\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{6}{\pi}\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{6}{\pi} + \dfrac{6}{\pi} = \dfrac{12}{\pi}.$

PROBLÈME **11 points**

Partie A : étude d'une fonction auxiliaire

1. g est la somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle :
$g'(x) = -4\mathrm{e}^{-2x} + 8\mathrm{e}^{-x} - 4 = -4\left(\mathrm{e}^{-2x} + 2\mathrm{e}^{-x} + 1\right) = -4\left(\mathrm{e}^{-x} + 1\right)^2$.
2. Comme $\left(\mathrm{e}^{-x} - 1\right)^2 > 0$ quel que soit le réel x, la dérivée est négative et la fonction est décroissante sur $\mathbb{R}$. D'où le tableau de variations :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	↘	

3. **a.** $g(0) = 2 - 8 - 0 + 6 = 0$.
b. La fonction étant décroissante sur $\mathbb{R}$ et s'annulant en 0, on en déduit que :
- sur $]-\infty\,;\,0[$, $g(x) > 0$;
- sur $]0\,;\,-\infty[$, $g(x) < 0$.

Partie B : étude de la fonction

1. **a.** Posons $\mathrm{e}^{-x} = X$; alors $\mathrm{e}^{-2x} = \left(\mathrm{e}^{-x}\right)^2 = X^2$; l'équation à résoudre s'écrit :
$2X^2 - 8X + 6 = 0 \iff X^2 - 4X + 3 = 0 \iff (X-2)^2 - 4 + 3 = 0 \iff (X-2)^2 - 1 = 0 \iff (X-2)^2 - 1^2 = 0 \iff (X-2+1)(X-2-1) = 0 \iff$
$\left\{\begin{array}{l c l} X-1 & = & 0\\ X-3 & = & 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l c l} X & = & 1\\ X & = & 3\end{array}\right.$
Il reste à résoudre :
$\left\{\begin{array}{l c l} X = \mathrm{e}^{-x} & = & 1\\ X = \mathrm{e}^{-x} & = & 3\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l c l} -x & = & 0\\ -x & = & \ln 3\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l c l} x & = & 0\\ x & = & -\ln 3\end{array}\right.$ On a donc $S = \{-\ln 3\,;\,0\}$.
b. Voir plus bas.
2. **a.** On a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-2x} = 0$, donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 6$.
Ceci montre que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = 6$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$ au voisinage de plus l'infini.
b. Dans l'écriture de $f(x)$, factorisons e^{-2x} ;
$f(x) = \mathrm{e}^{-2x}\left(2 - 8\mathrm{e}^{x} + 6\mathrm{e}^{2x}\right)$;
Comme $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{x} = \lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{2x} = 0$, on peut en déduire que $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(2 - 8\mathrm{e}^{x} + 6\mathrm{e}^{2x}\right) = 2$ et comme $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-2x} = +\infty$, on en déduit par produit de limites que $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.
3. **a.** f somme de fonctions dérivable sur $\mathbb{R}$ est dérivable sur cet intervalle et
$f'(x) = -4\mathrm{e}^{-2x} + 8\mathrm{e}^{-x} = 4\mathrm{e}^{-x}\left(-\mathrm{e}^{-x} + 2\right)$.
Comme $4\mathrm{e}^{-x} > 0$ quel que soit le réel x, $f'(x)$ est du signe de $-\mathrm{e}^{-x} + 2$.
b. On a $-\mathrm{e}^{-x} + 2 > 0 \iff 2 > \mathrm{e}^{-x} \iff \ln 2 > -x \iff x > -\ln 2$.
Donc sur $]-\ln 2\,;\,+\infty[$, $f'(x) > 0$, donc f est croissante,
sur $]-\infty\,;\,-\ln 2[$, $f'(x) < 0$, donc f est décroissante.
D'où le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		$-\ln 2$		0		$+\infty$
$f(x)$		↘	-2	↗	0	↗	

$f(-\ln 2) = 2\mathrm{e}^{2\ln 2} - 8\mathrm{e}^{\ln 2} + 6 = 2\mathrm{e}^{\ln 4} - 8\mathrm{e}^{\ln 2} + 6 = 2\times 4 - 8\times 2 + 6 = 8 - 16 + 6 = -2$.

c. On a $M(x\,;\,y) \in \mathcal{T} \iff y - f(0) = f'(0)(x-0) \iff y - 0 = 4x(-0) \iff y = 4x$.

d. Pour comparer les positions relatives de la droite $\mathcal{T}$ et de la courbe $\mathcal{C}$ on considère la différence $f(x) - (4x) = 2\mathrm{e}^{-2x} - 8\mathrm{e}^{-x} + 6 - 4x = g(x)$ dont on a vu le signe à la partie A.

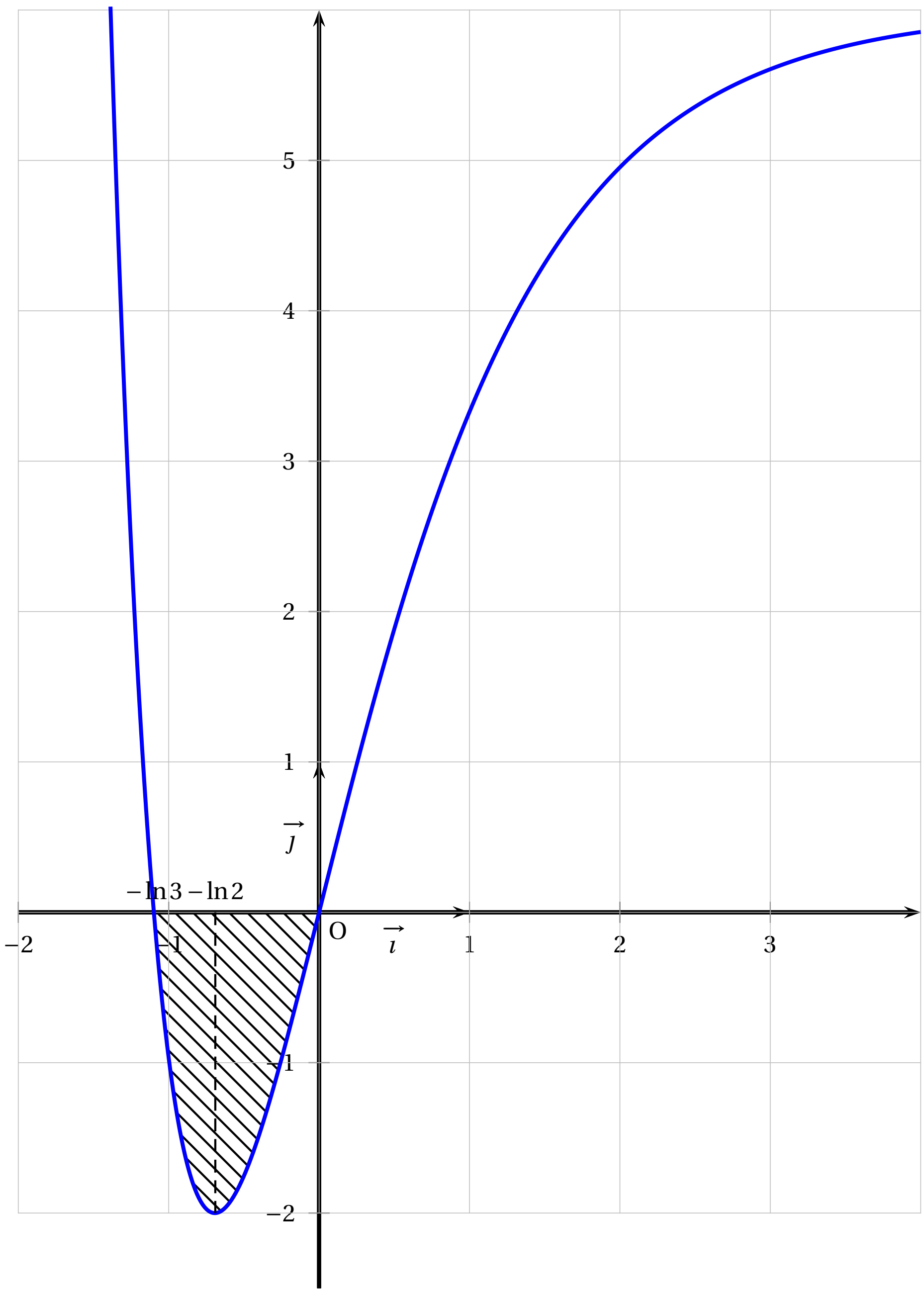
Si $x < 0, g(x) > 0$, donc la courbe $\mathcal{C}$ est au dessus de la droite $\mathcal{T}$;

Si $x < 0, g(x) < 0$, donc la courbe $\mathcal{C}$ est au dessous de la droite $\mathcal{T}$.

e. Voir la figure.

Partie C : primitive et calcul d'aire

1. Une primitive de f est la fonction F définie par :
   $F(x) = -\mathrm{e}^{-2x} + 8\mathrm{e}^{-x} + 6x$.
2. Voir la figure.
3. Sur l'intervalle $[-\ln 3\,;\,0]$, $f(x) < 0$, donc l'aire en unité d'aire de la partie $\mathcal{E}$ est égale à :
   $-\displaystyle\int_{-\ln 3}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = -[F(x)]_{-\ln 3}^{0} = F(-\ln 3) - F(0) =$
   $-\mathrm{e}^{2\ln 3} + 8\mathrm{e}^{\ln 3} - 6\ln 3 - \left(-\mathrm{e}^{0} + 8\mathrm{e}^{0} + 6\times 0\right) = -9 + 24 - 6\ln 3 + 1 - 8 = 8 - 6\ln 3$.
   Or l'unité d'aire est égale à $2\times 2 = 4$ cm^2.
   Finalement : $\mathcal{A}(\mathcal{E}) = 4(8 - 6\ln 3) = 32 - 24\ln 3 \approx 5,633 \approx 5,63$ cm^2 au mm^2 près.



5
4
3
2
1
$\vec{\jmath}$
$-\ln 3$ $-\ln 2$
O
$\vec{\imath}$
−2
−1
1
2
3
−1
−2