Durée : 4 heures

Correction du baccalauréat STI Génie électronique génie électrotechnique, optique Métropole juin 2007

EXERCICE 1 **6 points**

1.

$$z^2+4z+16=0.$$

$z^2+4z+16=0 \iff (z+2)^2-4+16=0 \iff (z+2)^2+12=0 \iff$ $(z+2)^2=\left(2\text{i}\sqrt{3}\right)^2$.

L'équation a donc deux solutions complexes :

$$z_1=-2+2\text{i}\sqrt{3}, \quad z_2=-2-2\text{i}\sqrt{3}.$$

2. a. $P(4)=4^3-64=0$. P est donc factorisable par $(z-4)$.

b. Si $P(z)=(z-4)\left(az^2+bz+c\right)$, alors $P(z)=az^3+(b-4)z^2+(c-4b)z-4c=z^3-64$ quel que soit $z\in\mathbb{C}$.

En identifiant on obtient $a=1$, $c=-16$ et $\left\{\begin{array}{rcl} b-4 &=& 0\\ c-4b &=& 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} b &=& 4\\ 4 &=& b\end{array}\right.$

On a donc :

$$P(z)=(z-4)\left(z^2+4z-16\right).$$

c. D'après la question **1.**, les solutions de l'équation $P(z)=0$ sont 4, $-2+2\text{i}\sqrt{3}$ et $-2-2\text{i}\sqrt{3}$.

3. a. $z_A=z_1=-2+2\text{i}\sqrt{3}$, donc $|z_A|^2=4+12=16=4^2$. Donc $|z_A|=4$.

En factorisant 4, $z_A=4\left(-\dfrac{1}{2}+\text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=4\text{e}^{\text{i}\frac{2\pi}{3}}$. Comme $z_B=\overline{z_A}$, $z_B=4\text{e}^{-\text{i}\frac{2\pi}{3}}$.

b. A et B sont sur le cercle centré à l'origine de rayon 4 et à la perpendiculaire à l'axe $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}\right)$ passant par le point d'abscisse -2.

c. De $\arg z_A=\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{\text{OA}}\right)=\dfrac{2\pi}{3}$ et $\arg z_B=\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{\text{OB}}\right)=-\dfrac{2\pi}{3}$, on en déduit que $\left(\overrightarrow{\text{OA}}, \overrightarrow{\text{OB}}\right)=\dfrac{2\pi}{3}$. Les arcs $\overset{\frown}{\text{CA}}$, $\overset{\frown}{\text{AB}}$ et $\overset{\frown}{\text{BC}}$ ont la même longueur, de même que les cordes [CA], [AB] et [BC].

Le triangle ABC est donc équilatéral.

4. a. On a par définition de la rotation :

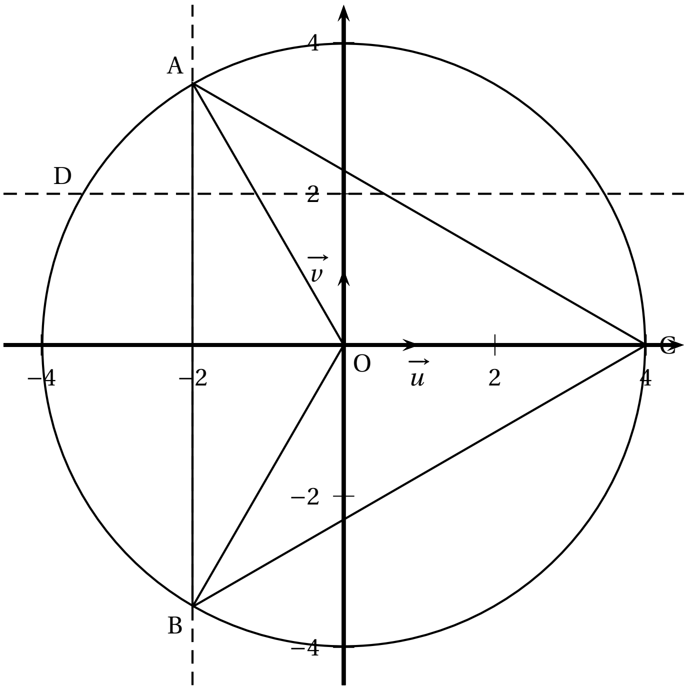
$z_D=z_A\text{e}^{\frac{\pi}{6}}$.

z_D a donc le même module que z_A soit 4 et son argument est celui de z_A augmenté de $\frac{\pi}{6}$, soit $\dfrac{2\pi}{3}+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{5\pi}{6}$.

Conclusion $z_D=4\text{e}^{\frac{5\pi}{6}}$.

b. On a donc $z_D=4\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\text{i}\dfrac{1}{2}\right)=-2\sqrt{3}+2\text{i}$.

c. On place le point D comme le point commun au cercle centré en O de rayon 4 et la perpendiculaire à $\left(\text{O}, \overrightarrow{v}\right)$ contenant le point (0 ; 2).



EXERCICE 2 **4 points**

1. — $AR_1R_2R_3R_6R_7B$
   — $AR_1R_2R_4R_6R_7B$
   — $AR_1R_2R_5R_4R_6R_7B$
   — $AR_1R_8R_9R_{14}R_{16}R_{17}R_{18}B$
   — $AR_1R_8R_{10}R_{12}R_{14}R_{16}R_{17}R_{18}B$
   — $AR_1R_8R_{11}R_{13}R_{15}R_{17}R_{18}B$
2. **a.** Chaque parcours a une probabilité de $\frac{1}{6}$. Il y a 3 parcours passant par R_7 ; la probabilité cherchée est donc égale à $3 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$.
   b. Il y a 2 parcours passant par R_{14} ; la probabilité cherchées est donc égale à $2 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$.
3. **a.** Il y a deux parcours à 6 bonds qui correspondent à X = 12 ;
   trois parcours à 7 bonds qui correspondent à X = 14 ;
   un parcours à 8 bonds qui correspondent à X = 16
   b. D'où le tableau :

X	12	14	18
$p(X = x_i)$	$\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$	$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

   c. $E(X) = 12 \times \frac{1}{3} + 14 \times \frac{1}{2} + 16 \times \frac{1}{6} = \frac{24 + 42 + 16}{6} = \frac{82}{6} = \frac{41}{3} \approx 13,66.$
4. En reprenant les calculs avec un temps t en secondes, on obtient :

$$E(X) = 6t \times \frac{1}{3} + 7t \times \frac{1}{2} + 8t \times \frac{1}{6} = \frac{12t + 21t + 8t}{6} = \frac{41t}{6}.$$

Donc $E(X) = 10 \iff \frac{41t}{6} = 10 \iff 41t = 60 \iff t = \frac{60}{41}$ d'où $t \approx 1,46$ s.

Problème **10 points**

Partie A : étude d'une fonction auxiliaire

$$g(x) = x^2 - 1 + \ln x.$$

1. g est la somme de fonctions dérivables sur $]0~;~+\infty[$, et sur cet intervalle :
   $g'(x) = 2x + \dfrac{1}{x}$
   $g'(x)$ somme de deux termes positifs est positive : la fonction g est donc croissante sur $]0~;~+\infty[$.
2. $g(1) = 1 - 1 + \ln 1 = 0$.
   La fonction étant croissante, on en déduit :
   — $g(x) < 0$ sur $]0~;~1[$;
   — g s'annule en 1 ;
   — $g(x) > 0$ sur $]1~;~+\infty[$.

Partie B : détermination de l'expression de la fonction *f*

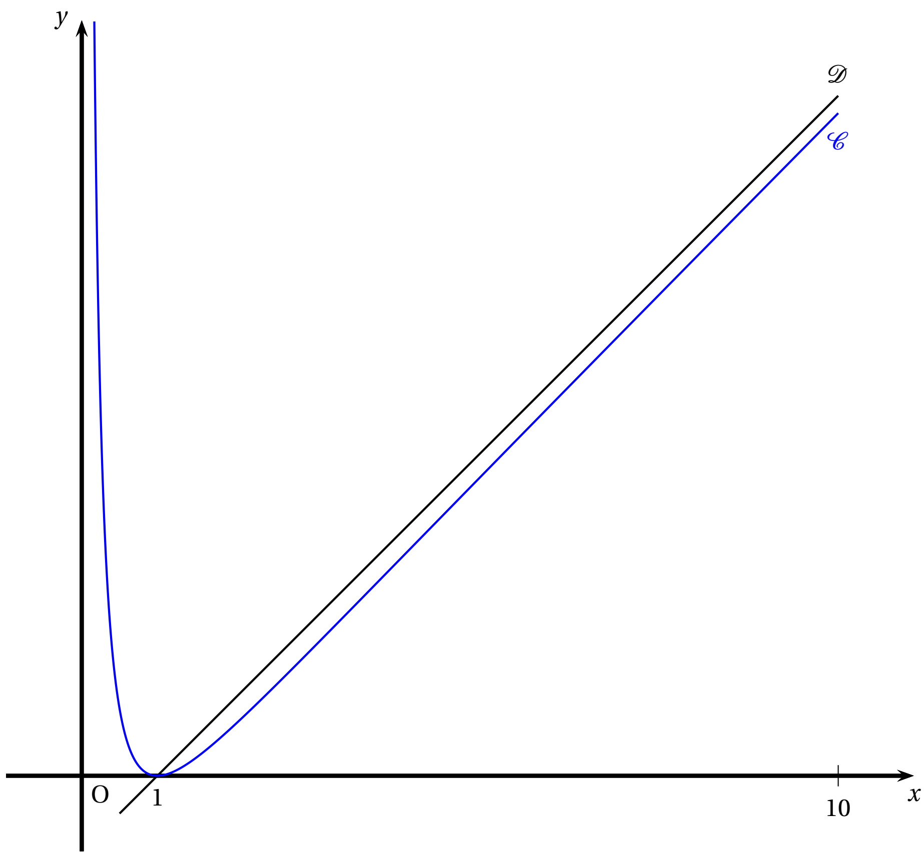
1. f est une somme de fonctions dérivables sur $]0~;~+\infty[$ et
   $f'(x) = a - \dfrac{\frac{1}{x} \times x - \ln x}{x^2} = a - \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$.
2. La première condition se traduit par $0 = a + b - \dfrac{\ln 1}{1} = a + b$ et la seconde par $f'(1) = 0 \iff a - \dfrac{1 - \ln 1}{1^2} = 0 \iff a - 1 = 0 \iff a = 1$ et par conséquent $b = -1$.
   On a donc :
   $$f(x) = x - 1 - \frac{\ln x}{x} \text{ sur }]0~;~+\infty[.$$

Partie C : étude de la fonction *f*

1. **a.** Comme $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x} = +\infty$, on obtient par produit des limites : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln x}{x} = -\infty$.
   Comme $\lim\limits_{x \to 0} x - 1 = -1$; on a finalement $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$.
   Interprétation graphique : l'axe des ordonnées est asymptote verticale à $\mathscr{C}$ au voisinage de zéro.

   b. On sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ et comme $\lim\limits_{x \to +\infty} x - 1 = +\infty$, on a finalement : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
2. **a.** $\dfrac{g(x)}{x^2} = \dfrac{x^2 - 1 + \ln x}{x^2} = 1 - \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{\ln x}{x^2}$.
   D'autre part on a vu que $f'(x) = 1 - \dfrac{1 - \ln x}{x^2} = 1 - \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{\ln x}{x^2}$.
   On a bien $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.

   b. Comme $x^2 >$, le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$, vu à la question A. 2. soit :
   — $f'(x) < 0$ sur $]0~;~1[$;
   — f' s'annule en 1 ;
   — $f'(x) > 0$ sur $]1~;~+\infty[$.
   D'où le tableau de variations :



c.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

c. On en déduit que $f(x) > 0$ sauf $f(1) = 0$.

3. **a.** Considérons la fonction d définie par :

$d(x) = f(x) - (x-1) = x - 1 - \dfrac{\ln x}{x} - x + 1 = -\dfrac{\ln x}{x}$.

On a déjà vu que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$. Ceci prouve que la droite $\mathcal{D}$ est asymptote à $\mathcal{C}$ au voisinage de plus l'infini.

b. Il faut étudier le signe la fonction d définie par $d(x) = -\dfrac{\ln x}{x}$ qui est du signe de $-\ln x$, qui s'annule en 1, et positive sur $]0\,;\,1[$ et négative sur $]1\,;\,+\infty[$.

Graphiquement ceci prouve que :

— sur $]0\,;\,1[$, $\mathcal{C}$ est au dessus de $\mathcal{D}$;

— sur $]1\,;\,+\infty[$, $\mathcal{C}$ est au dessous de $\mathcal{D}$; ;

— $\mathcal{D}$ et $\mathcal{C}$ sont sécantes en $(1\,;\,0)$.

Partie D : calcul d'aire

1. **a.** La fonction $x \longmapsto \ln x$ étant dérivable sur $]0~;~+\infty[$, la fonction H l'est aussi et
$H'(x) = 2\ln x \times \dfrac{1}{x} = 2\dfrac{\ln x}{x}$.

   b. On déduit de la question précédente qu'une primitive de $\dfrac{\ln x}{x}$ est la fonction $\dfrac{1}{2}(\ln x)^2$.
Donc une primitive de :
$f(x) = x - 1 - \dfrac{\ln x}{x}$ est
$F(x) = \dfrac{x^2}{2} - x - \dfrac{1}{2}(\ln x)^2$.

2. **a.** On sait que l'aire de la surface limitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \mathrm{e}$ est égale à l'intégrale : $\mathscr{A} = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} f(x)\,\mathrm{d}x$.
D'après la question précédente :
$\mathscr{A} = \left[\dfrac{x^2}{2} - x - \dfrac{1}{2}(\ln x)^2\right]_1^{\mathrm{e}} = \dfrac{\mathrm{e}^2}{2} - \mathrm{e} - \dfrac{1}{2}(\ln \mathrm{e})^2 - \left(\dfrac{1^2}{2} - 1 - \dfrac{1}{2}(\ln 1)^2\right) =$
$\dfrac{\mathrm{e}^2}{2} - \mathrm{e} - \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2} + 1 = \dfrac{\mathrm{e}^2}{2} - \mathrm{e}$.

   b. $\mathscr{A} = \dfrac{\mathrm{e}^2}{2} - \mathrm{e} \approx 0,976 \approx 0,98$ cm^2 au mm^2 près.