Durée : 4 heures

Corrigé du baccalauréat STI Génie électronique Génie électrotechnique, optique Métropole septembre 2007

EXERCICE 1

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation :

$$z^2-6z+12=0 \iff (z-3)^2-9+12=0 \iff (z-3)^2+3=0 \iff (z-3)^2=(\mathrm{i}\sqrt{3})^2$$

Donc deux solutions :
$z_1=3+\mathrm{i}\sqrt{3}$ et $z_2=3-\mathrm{i}\sqrt{3}$

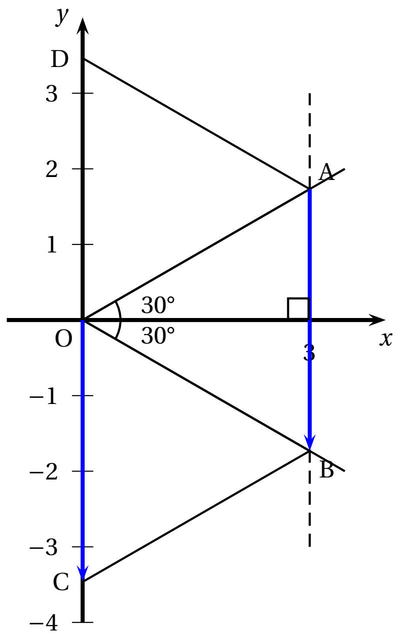
2. $z_A=3+\mathrm{i}\sqrt{3}$ et $z_B=3-\mathrm{i}\sqrt{3}$.

   a. On a $|z_A|^2=9+3=12$, donc $|z_A|=2\sqrt{3}$.

   On peut écrire : $z_A=2\sqrt{3}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\mathrm{i}\dfrac{1}{2}\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)=2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{6}}$.

   On a donc $\arg(z_A)=\dfrac{\pi}{6}$ et comme $z_B=\overline{z_A}$, $\arg(z_B)=-\dfrac{\pi}{6}$.

   b.



3. **a.**

   b. On sait que $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AB} \iff \overrightarrow{OC}(0\ ;\ -2\sqrt{3})$. Donc $C(0\ ;\ -2\sqrt{3})$ ou $z_C=-2\mathrm{i}\sqrt{3}$.

   c. $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AB} \Rightarrow OC=AB=2\sqrt{3}=OA=OB$.

Le triangle BOC est donc isocèle en O et comme $\widehat{COB}=60°$, il est équilatéral et OC = BC.

d. $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AB} \iff$ (OABC) est un parallélogramme et comme deux côtés consécutifs ont la même longueur, c'est un losange.

4. **a.**

b. Par définition de la rotation : $\left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{\text{OD}}\right) = \left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{\text{OA}}\right) + \left(\overrightarrow{\text{OA}}\ ;\ \overrightarrow{\text{OD}}\right) = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{2}$.

Comme OD = OA = $2\sqrt{3}$, le point D est le point de $[\text{O}y)$ tel que $z_{textD} = 2\text{i}\sqrt{3}$.

c. Pour la même raison que le triangle OBC, le triangle OAD est équilatéral, donc OA = AD et comme OA = OB = OB, AD = BC.

Comme A et B d'une part, C et D d'autre part ont la même abscisse, les droites (AB) et (CD) sont parallèles : le quadrilatère (ABCD) est donc un trapèze et comme AD = BC, c'est un trapèze isocèle.

EXERCICE 2

1.

$$y" + 9y = 0.$$

On sait que la solution générale est de la forme :
$y(t) = A\cos 3t + B\sin 3t$, avec A, B et t réels.

2.

$$y" + 9y = 8\sin t.$$

a.

$$f(t) = -\frac{1}{3}\sin(3t) + A\cos(3t) + \sin t.$$

$$f'(t) = -\cos(3t) - 3A\sin(3t) + \cos t.$$

$$f''(t) = 3\sin(3t) - 9A\cos(3t) - \sin(t).$$

Vérification :
$3\sin(3t) - 9A\cos(3t) - \sin(t) + 9\left(-\dfrac{1}{3}\sin(3t) + A\cos(3t) + \sin t\right) = 3\sin(3t) - 9A\cos(3t) - \sin(t) - 3\sin(3t) + 9A\cos(3t) + 9\sin(t) = 8\sin(t)$.

La fonction f est donc une solution de l'équation (E).

b. $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 0 \iff -\dfrac{1}{3}\sin(3\dfrac{\pi}{4}) + A\cos(3\dfrac{\pi}{4}) + \sin\dfrac{\pi}{4} = 0 \iff -\dfrac{1}{3}\dfrac{\sqrt{2}}{2} + A \times \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) + \dfrac{\sqrt{2}}{2} \iff -\dfrac{1}{3} - A + 1 = 0 \iff A = \dfrac{2}{3}$.

3.

$$g(t) = -\frac{1}{3}\sin(3t) + \frac{2}{3}\cos(3t) + \sin t.$$

La valeur moyenne de la fonction g sur l'intervalle $\left[0\ ;\ \dfrac{\pi}{3}\right]$ est :

$$\frac{3}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{3}} g(t)\,\text{d}t = \frac{3}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(-\frac{1}{3}\sin(3t) + \frac{2}{3}\cos(3t) + \sin t\right)\text{d}t$$

$$\frac{3}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{3}} g(t)\,\text{d}t = \frac{3}{\pi}\left[\frac{1}{9}\cos 3t + \frac{2}{9}\sin 3t - \cos t\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{5}{6\pi}.$$

PROBLÈME

Partie A. Détermination d'une fonction *f*

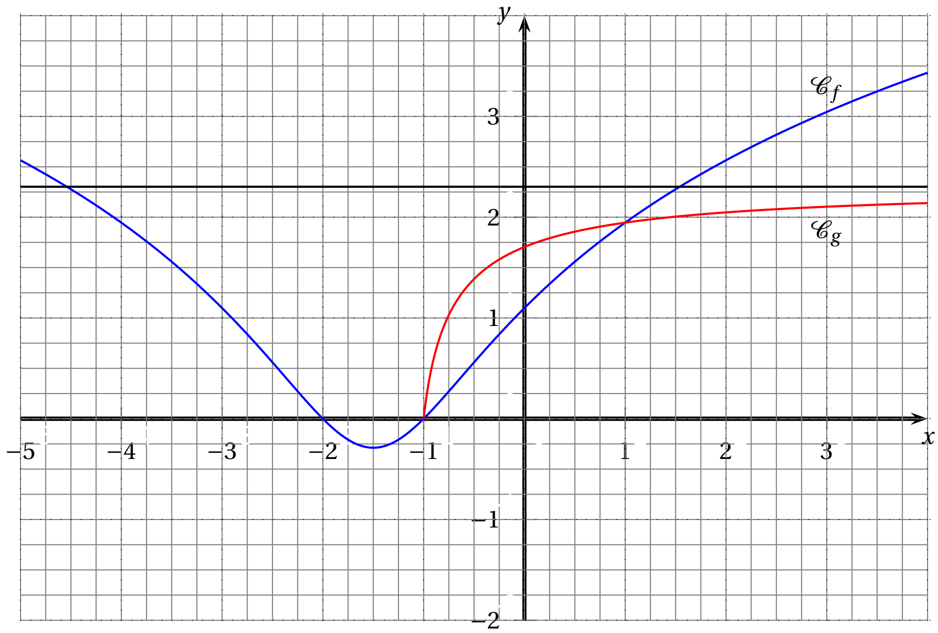
1. On a :

$$\begin{cases} \text{A}(0\,;\,\ln 3) \in \mathcal{C}_f & \iff & \ln 3 = \ln c \\ \text{B}(-1\,;\,0) \in \mathcal{C}_f & \iff & 0 = \ln(a-b+c) \\ \text{C}(-2\,;\,0) \in \mathcal{C}_f & \iff & 0 = \ln(4a-2b+c) \end{cases}$$

On obtient donc : $c = 3$, $a-b+3 = 1$ et $4a-2b+3 = 1$.

Donc $\begin{cases} a-b & = & -2 \\ 2a-b & = & -1 \end{cases} \iff \begin{cases} a-b & = & -2 \\ a & = & 1 \end{cases} \iff \begin{cases} b & = & 3 \\ a & = & 1 \end{cases}$

On a donc : $f(x) = \ln\left(x^2+3x+3\right)$.



2. **a.** f est de la forme $\ln u$, avec u polynôme dérivable sur $\mathbb{R}$ et qui a pour dérivée $\dfrac{u'}{u}$.

Donc $f'(x) = \dfrac{2x+3}{x^2+3x+3}$.

b. Le trinôme x^2+3x+3 a pour déterminant $\Delta = -3$; il est donc du signe de a = +1, donc strictement positif.

(Autre méthode : $x^2+3x+3 = \left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2 - \dfrac{9}{4} + 3 = \left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} \geqslant \dfrac{3}{4} > 0$.)

$f'(x)$ est donc du signe de la fonction affine $x \mapsto 2x+3$, qui s'annule pour $x = -\dfrac{3}{2}$.

$f'(x) < 0$ sur $\left]-\infty\,;\,-\dfrac{3}{2}\right[$, soit f décroissante sur cet intervalle, et $f'(x) > 0$ sur $\left]-\dfrac{3}{2}\,;\,+\infty\right[$, soit f croissante sur cet intervalle.

d a donc un minimum en $-\dfrac{3}{2}$.

c. Le minimum de f est égal à $f\left(-\dfrac{3}{2}\right) = \ln\left(\dfrac{9}{4} - \dfrac{9}{2} + 3 = \ln\left(\dfrac{3}{4}\right) = \ln 3 - 2\ln 2.\right.$

Partie B. Étude d'une fonction g

1. $g(-1) = \ln\left(\dfrac{-10+11}{-1+2}\right) = \ln 1 = 0$.

2. Pour $x \neq 0$, $\dfrac{10x+11}{x+2} = \dfrac{10+\frac{11}{x}}{1+\frac{2}{x}}$ qui a pour limite 10 au voisinage de l'infini.

Donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = \ln 10$.

Ceci signifie que $\mathscr{C}_g$ a pour asymptote la droite horizontale D, d'équation $y = \ln 10$ au voisinage de plus l'infini.

1. Sur $[-1\ ;\ +\infty[$, $10x+11 > 0$ et $x+2 > 0$, donc $\ln\left(\dfrac{10x+11}{x+2}\right) = \ln(10x+11) - \ln(x+2)$.

D'où g'(x) = $\dfrac{10}{10x+11} - \dfrac{1}{x+2} = \dfrac{10(x+2)-1(10x+11}{(10x+11)(x+2)} = \dfrac{20-11}{(10x+11)(x+2)} = \dfrac{9}{(10x+11)(x+2)}$ sur $[-1\ ;\ +\infty[$

2. Comme tous les termes de la dérivée sont strictement positifs, celle-ci est strictement positive : la fonction g est strictement croissante sur $[-1\ ;\ +\infty[$ de $g(-1) = 0$ à $\ln 10$.

Partie C. Étude des positions relatives de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$

1. **a.** $\left(x^2-1\right)(x+5) = x^3+5x^2-x-5 = P(x)$

b. D'après la question précédente : $P(x) = 0 \iff \left(x^2-1\right)(x+5) = 0 \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& -1\\ x &=& 1\\ x &=& -5\end{array}\right.$

c. Comme $P(x) = (x-1)(x+1)(x+5)$, son signe dépend de celui de ces trois facteurs, d'où le tableau de signes :

x	$-\infty$		-5		-1		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+5$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

2. **a.** Dans $[-1\ ;\ +\infty[$, $f(x) = g(x) \iff \ln\left(x^2+3x+3\right) = \ln\left(\dfrac{10x+11}{x+2}\right) \iff x^2+3x+3 = \dfrac{10x+11}{x+2}$ (par croissance de la fonction ln).

Ce qui équivaut à $(x+2)\left(x^2+3x+3\right) = 10x+11 \iff x^3+3x^2+3x+2x^2+6x+6 = 10x+11 \iff x^3+5x^2-x-5 = 0 \iff P(x) = 0$, équation qui a été résolue ci-dessus.

$$\text{Sur } [-1\ ;\ +\infty[,\ f(x) = g(x) \iff x = -1,\ \text{ou } x = 1, \text{ou } x = -5.$$

b. Graphiquement la question précédente signifie que sur l'intervalle $[-1\ ;\ +\infty[$, les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont sécantes pour $x = -1,\ x = 1$.

3. **a.** De la même façon que dans la question précédente, sur $[-1\ ;\ +\infty[$, $f(x) \geqslant g(x) \iff P(x) \geqslant 0$.

D'après le tableau ci-dessus, on a donc $f(x) \geqslant g(x)$ sur $[1\ ;\ +\infty]$.

b. De la même façon sur $]-1\ ;\ 1[$, $P(x) < 0 \iff f(x) < g(x)$, ce qui signifie que $\mathscr{C}_f$ est au-dessous de $\mathscr{C}_g$ sur $]-1\ ;\ 1[$.

Par contre sur $]1\ ;\ +\infty[$, $f(x) > g(x)$, ce qui signifie que $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de $\mathscr{C}_g$.

Enfin en -1 et en 1, les deux courbes sont sécantes.

4. Cf. figure.