

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat STI Métropole 21 juin 2011 ∞  
Génie électronique, électrotechnique, optique

EXERCICE 1

5 points

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  d'unité graphique 2 cm.

On désigne par  $i$  le nombre complexe de module 1 et d'argument  $\frac{\pi}{2}$ .

- Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation :  $z^2 - 2\sqrt{2}z + 4 = 0$ .
- On considère les deux points  $A$  et  $B$  d'affixes respectives  $z_A = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$  et  $z_B = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$ .
  - Déterminer le module et un argument de  $z_A$  et  $z_B$ .
  - En déduire la forme exponentielle de  $z_A$ .
  - Placer les points  $A$  et  $B$  dans le plan complexe de façon précise. On laissera les traits de construction.
- On désigne par  $R$  la transformation du plan complexe qui, à tout point  $M$  d'affixe  $z$ , fait correspondre le point  $M'$  d'affixe  $z'$  telle que  $z' = ze^{-i\frac{\pi}{12}}$ .
  - Indiquer la nature de la transformation  $R$  et préciser ses éléments caractéristiques.
  - On nomme  $C$  l'image de  $A$  par  $R$ .  
Déterminer la forme exponentielle de  $z_C$  du point  $C$ , puis sa forme algébrique.
  - Placer le point  $C$  sur le graphique.
- Soit  $D$  l'image du point  $B$  par la translation  $T$  de vecteur d'affixe  $-2\sqrt{2}$ .
  - Calculer l'affixe  $z_D$  du point  $D$ .
  - Placer  $D$  sur le graphique.
  - Quelle est la nature du triangle  $ACD$ ? Justifier votre réponses.

EXERCICE 2

5 points

Les différentes questions sont indépendantes les unes des autres.

Dans ce questionnaire à choix multiples, aucune justification n'est demandée.

Pour chacune des questions, une seule des réponses proposées est correcte.

Une bonne réponse rapporte un point. Une mauvaise réponse ou une absence de réponses n'enlève ni ne rapporte aucun point.

On notera sur la copie le numéro de la question et on recopiera la réponse choisie.

- Les solutions de l'équation différentielle  $y' = 2y$  sont les fonctions  $f$  définies sur  $\mathbb{R}$  par :

$f(x) = ke^{0,5x}$ avec $k$ réel	$f(x) = ke^{-2x}$ avec $k$ réel	$f(x) = ke^{2x}$ avec $k$ réel
----------------------------------	---------------------------------	--------------------------------

- À l'occasion des Jeux Olympiques de Pékin, « La Française des Loteries » a vendu des tickets à gratter au prix de 5 euros pièces.  
Parmi les 750 000 tickets vendus :
  - 152 250 tickets permettent de gagner un lot de 5 € ;
  - 18 050 tickets permettent de gagner un lot de 15 € ;
  - 6 000 tickets permettent de gagner un lot de 45 € ;
  - 90 tickets permettent de gagner un lot de 1 000 € ;

— 10 tickets permettent de gagner un lot de 10 000 € ;

Le gain d'un joueur est la différence entre la valeur du lot gagné et le prix d'achat du ticket. Le gain peut-être négatif ou positif.

a. Tom a acheté un ticket à gratter.

La probabilité qu'il ait gagné de l'argent est égale à :

0,0322	0,2352	0,5
--------	--------	-----

b. On désigne par  $X$  la variable aléatoire qui, à chaque ticket vendu, associe le gain du joueur. L'espérance mathématique de  $X$  arrondie si besoin au centième, est égale à :

15 000 €	11,77 €	- 3,01 €
----------	---------	----------

3. Une urne contient trois boules rouges notées  $R_1, R_2, R_3$  et une boule noire. On tire au hasard et successivement deux boules de l'urne.

La probabilité que les deux boules tirées soient rouges est égale à 0,5.

Parmi les trois propositions suivantes, laquelle est correcte ?

Proposition 1	Proposition 2	Proposition 3
Après avoir tiré la première boule, on l'a remise dans l'urne avant de tirer la deuxième.	Après avoir tiré la première boule, on ne l'a pas remise dans l'urne avant de tirer la deuxième.	Les deux types de tirage (avec et sans remise) donne le même résultat.

### PROBLÈME

10 points

Soit la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$  par

$$f(x) = \frac{1 + \ln(x)}{x}$$

et  $\Gamma$  sa courbe représentative dans un repère orthogonal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

Selon les questions, on pourra remarquer que  $f(x)$  peut aussi s'écrire  $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{\ln(x)}{x}$ .  
Étude de la fonction  $f$

1. Dans cette question, on ne demande pas de justification mais des conjectures obtenues avec l'aide de la calculatrice.

Sur l'écran de la calculatrice, on fera apparaître la courbe  $\Gamma$ .

a. Faire un schéma reproduisant l'écran obtenu en précisant la fenêtre utilisée.

b. À partir de la lecture de l'écran, conjecturer le tableau de variation de la fonction  $f$ .

2. Le but de cette question est de prouver les renseignements conjecturés et indiqués dans le tableau de variation de la question précédente.

a. Calculer  $f'(x)$  et montrer que  $f'(x)$  est du signe de  $-\ln(x)$  sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$ .

b. En déduire les variations de la fonction  $f$ .

c. Calculer les limites de la fonction  $f$  aux bornes de son intervalle de définition.

### Quelques points particuliers

On considère la portion de la courbe  $\Gamma$  figurant sur la feuille ANNEXE, à rendre avec la copie.

$A$  est le point d'intersection de  $\Gamma$  avec l'axe des abscisses.  $B$  est le point d'abscisse  $e^{0,5}$ .  $D$  est le point de coordonnées  $(e^{-0,5}; 0)$ .

1. Justifier que l'abscisse du point  $A$  est égale à  $e^{-1}$ .
2. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même infructueuse, sera prise en compte pour l'évaluation.*

Tracer la droite  $(OB)$  sur le graphique de la feuille **ANNEXE, à rendre avec la copie.**

Cette droite semble tangente à la courbe  $\Gamma$  au point  $B$ . Qu'en est-il? Justifier la réponse.

### Calcul d'aire

On désigne par  $\Delta_1$  le domaine du plan limité par l'axe des abscisses, la courbe  $\Gamma$  et les droites d'équation  $x = e^{-1}$  et  $x = e^{-0,5}$ .

On désigne par  $\Delta_2$  le domaine du plan limité par l'axe des abscisses, la portion de la courbe située entre les points  $A$  et  $B$  et la droite  $(OB)$ .

1. Hachurer  $\Delta_2$  sur la feuille annexe.
2.
  - a. Calculer, en unités d'aire, l'aire du triangle  $OBD$ .
  - b. Donner, sans la calculer, une expression qui permet d'obtenir l'aire, en unité d'aire du domaine  $\Delta_2$ .
  - c. En déduire, toujours sans la calculer, une expression qui permet d'obtenir l'aire, en unités d'aire, du domaine  $\Delta_2$ .
3. Soit  $g$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par  $g(x) = \frac{1}{2}(\ln(x))^2 + \ln(x)$ .
  - a. Vérifier que  $g$  est une primitive de  $f$  sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ .
  - b. En déduire l'aire de  $\Delta_2$  en unités d'aire.

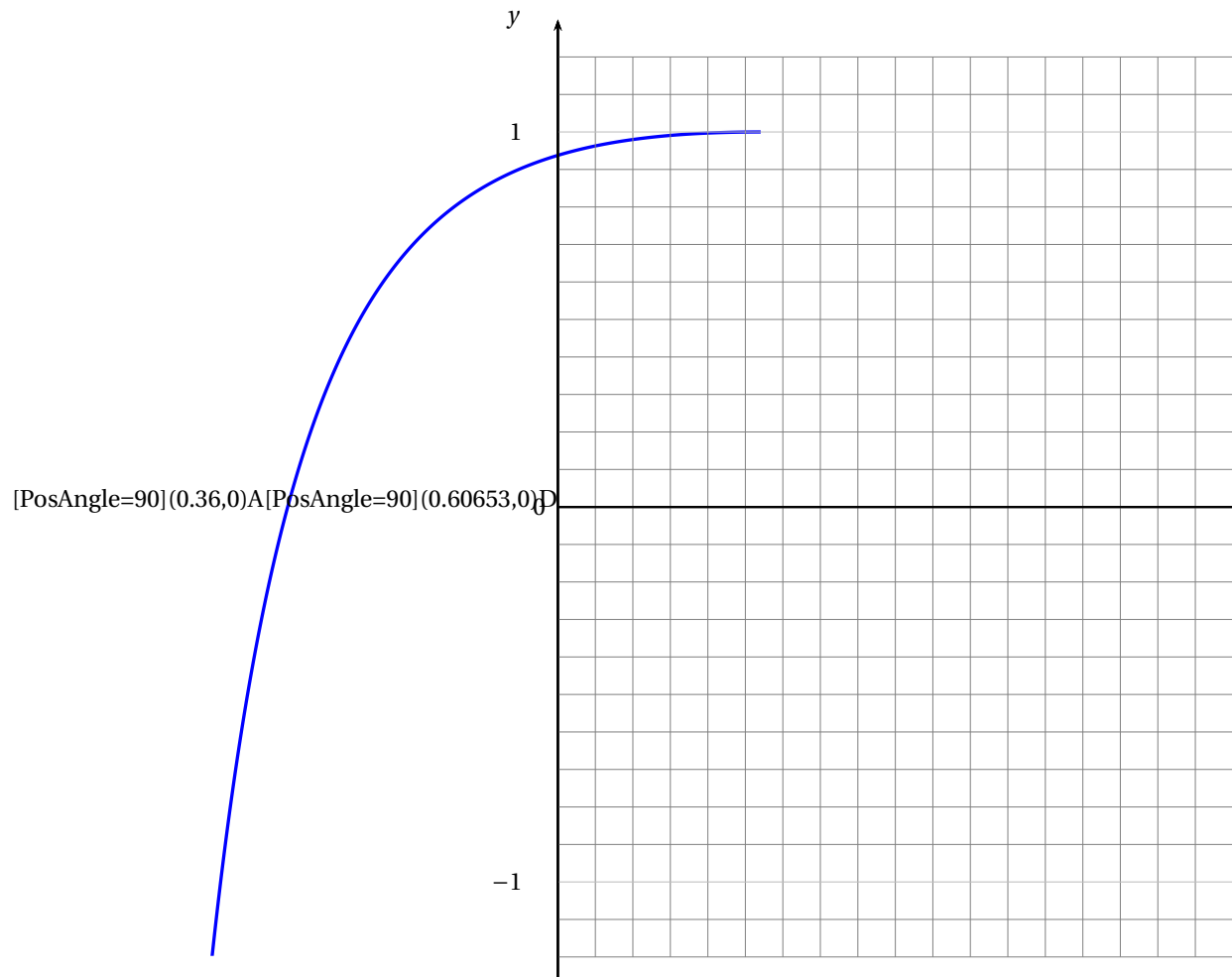


FIGURE 1 – ANNEXE, à rendre avec la copie