Baccalauréat STI Antilles–Guyane 20 juin 2011
Génie électronique, électrotechnique et optique

EXERCICE 1 **5 points**

Rappel : i désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

Le plan est muni du repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$ (unité : 3 cm).

1. Résoudre, dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation (E) :

$$9z^2 - 6z + 2 = 0.$$

2. On considère le point A d'affixe $z_{\mathrm{A}} = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}\mathrm{i}$ et le point B d'affixe $z_{\mathrm{B}} = \frac{1}{z_{\mathrm{A}}}$.
   Déterminer la forme algébrique de z_{B}.
3. Déterminer le module et un argument de z_{A}.
   En déduire le module et un argument de z_{B}.
4. **a.** Placer les points A et B dans le repère $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$ (*faire une figure sur papier millimétré*).
   b. Montrer que le triangle AOB est rectangle.
5. Soit C le point d'affixe $z_{\mathrm{C}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{8}}$ et C′ le point d'affixe $z_{\mathrm{C'}} = \frac{1}{z_{\mathrm{C}}}$.
   a. Donner une forme exponentielle de $z_{\mathrm{C'}}$.
   b. Montrer que le point C′ est l'image de C par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$.
6. Soit D le point d'affixe $z_{\mathrm{D}} = -\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\mathrm{i}$.
   Déterminer l'affixe du vecteur de la translation qui transforme D en A.

EXERCICE 2 **5 points**

On dispose d'un dé en forme de tétraèdre régulier, c'est-à-dire dont les quatre faces sont des triangles équilatéraux. Chacune de ces faces est repérée par une lettre inscrite sur cette face (A, B, C ou D). Chacune des lettres figure sur une et une seule face.
Quand le dé s'immobilise après un lancer, une des faces est cachée et les trois autres sont visibles ; le résultat de ce lancer est la lettre inscrite sur la face cachée du dé.
Le dé est supposé parfaitement équilibré, c'est-à-dire qu'à chaque lancer les quatre résultats possibles sont équiprobables.

Un joueur lance le dé deux fois de suite. On considère les évènements suivants :

A_1 : « le résultat du premier lancer est A »
A_2 : « le résultat du second lancer est A »

1. Quelle est la probabilité de $\overline{\mathrm{A}_1}$, évènement contraire de A_1 ?
2. Quelle est la probabilité de l'évènement $\overline{\mathrm{A}_1} \cap \mathrm{A}_2$?
3. Quelle est la probabilité de l'évènement $\mathrm{A}_1 \cap \mathrm{A}_2$?
4. Pour faire une partie (deux lancers successifs), le joueur doit payer 2 euros.
   Si le résultat A est obtenu aux deux lancers, le joueur reçoit 12 €.
   Si le résultat A est obtenu à un seul des deux lancers, le joueur reçoit 3 €.
   Si le résultat A n'est obtenu à aucun lancer, le joueur ne reçoit rien.
   Soit G la variable aléatoire qui, à chaque partie jouée, associe le gain (positif ou négatif) du joueur en euros, tenant compte des 2 euros payés et de la somme éventuellement reçue.

a. Montrer que $p(G = -2) = \dfrac{9}{16}$.

b. Quelles sont les valeurs prises par G ?

c. Donner la loi de probabilité de G.

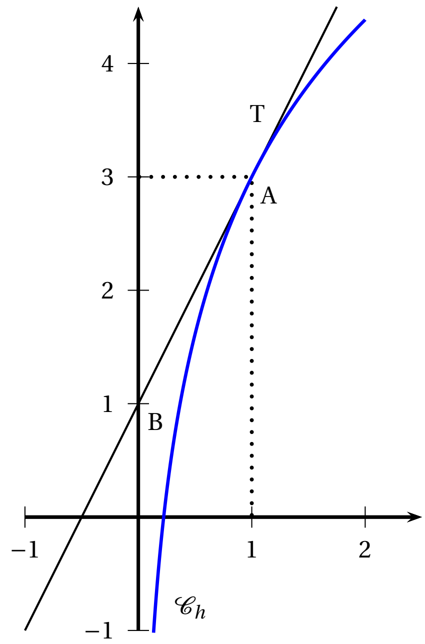
d. Quelle est la probabilité pour que le gain du joueur soit positif ?

e. Calculer l'espérance mathématique de G.

PROBLÈME **10 points**

Partie A

On considère la fonction h dont la courbe représentative $\mathscr{C}_h$ est tracée ci-contre. La droite T est la tangente à la courbe $\mathscr{C}_h$ au point A de coordonnées $(1\,;\,3)$; cette droite coupe l'axe des ordonnées au point B de coordonnées $(0\,;\,1)$. On admet qu'il existe des nombres réels a et b tels que, pour tout nombre réel x dans $]0\,;\,+\infty[$, $h(x) = a\ln x + b$.



Dans la question suivante, toute recherche, même incomplète, ou initiative, même infructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation :

Déterminer les nombres réels a et b.

Partie B

On considère la fonction g définie, pour tout réel x appartenant à $]0\,;\,+\infty[$, par :

$$g(x) = 2x\ln x + x - 1.$$

1. On note g' la dérivée de la fonction g.
   Montrer que, pour tout x appartenant à $]0\,;\,+\infty[$, on a $g'(x) = 2\ln x + 3$.
2. Résoudre dans $]0\,;\,+\infty[$ l'inéquation $2\ln x + 3 > 0$.
3. Déterminer les limites de la fonction g en 0 et en $+\infty$.
4. Dresser le tableau de variations de g sur $]0\,;\,+\infty[$. On y fera figurer les limites de g ainsi que sa valeur en 1.
5. Prouver que $g(x) < 0$ pour tout x appartenant à $]0\,;1[$ et $g(x) > 0$ pour tout x appartenant à $]1\,;\,+\infty[$.

Partie C

On considère la fonction f définie pour tout x appartenant à $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = x^2\ln x - x + 1.$$

On admet que la limite de la fonction f en 0 est égale à 1.

1. En remarquant que $f(x) = x(x\ln x - 1) + 1$ pour tout x appartenant à $]0\,;\,+\infty[$, calculer la limite de f en $+\infty$.

2. **a.** Montrer que la fonction dérivée de f est la fonction g, définie dans la partie B.
   b. En déduire le tableau de variations de f.
3. Recopier et compléter le tableau de valeurs ci-dessous. Pour chaque valeur, on inscrira dans le tableau l'arrondi au centième.

x	0,2	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$f(x)$			0				

4. Dans le plan muni du repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ (unité : 2 cm), tracer la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f. On utilisera une feuille de papier millimétré.

Partie D

Soit Δ la partie du plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ (construite dans la partie C) et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = 2$.

1. **a.** Hachurer la partie Δ sur le graphique construit dans la partie C.
   b. Par lecture graphique, encadrer par deux entiers consécutifs l'aire $\mathscr{A}$ de la partie Δ en centimètres carrés.
2. On admet que la fonction F définie pour tout réel x appartenant à $]0~;~+\infty[$ par :

$$F(x) = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} - \frac{x^2}{2} + x$$

est une primitive de la fonction f définie dans la partie C.

Déterminer la valeur exacte puis l'arrondi au millième de l'aire $\mathscr{A}$ de Δ en centimètres carrés.