Corrigé du baccalauréat STI Antilles–Guyane
Génie électronique, électrotechnique et optique
20 juin 2011

EXERCICE 1 **5 points**

1. Équation $9z^2 - 6z + 2 = 0$; $\Delta = 36 - 4 \times 9 \times 2 = -36 = (6\text{i})^2 < 0$. l'équation a donc deux racines complexes conjuguées :
$\dfrac{6+6\text{i}}{2 \times 9} = \dfrac{1}{3} + \text{i}\dfrac{1}{3}$ et $\dfrac{1}{3} - \text{i}\dfrac{1}{3}$.

$$S = \left\{\frac{1}{3} + \text{i}\frac{1}{3} \quad ; \quad \frac{1}{3} - \text{i}\frac{1}{3}\right\}$$

2. $z_B = \dfrac{1}{\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\text{i}} = \dfrac{\frac{3}{2} - \frac{3}{2}\text{i}}{\left(\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\text{i}\right)\left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2}\text{i}\right)} = \dfrac{\frac{3}{2} - \frac{3}{2}\text{i}}{\frac{9}{4} + \frac{9}{4}} = \dfrac{\frac{3}{2} - \frac{3}{2}\text{i}}{\frac{9}{2}} = \frac{2}{9}\left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2}\text{i}\right) = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3}\text{i}.$

3. On a $|z_A|^2 = \frac{9}{4} + \frac{9}{4} = \frac{18}{4} \Rightarrow |z_A| = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

On peut ensuite écrire $z_A = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \text{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

On reconnaît le cosinus et le sinus de $\dfrac{\pi}{4}$.

Un argument de z_A est $\dfrac{\pi}{4}$.

De $z_B = \dfrac{1}{z_A}$, on déduit que $|z_B| = \dfrac{1}{|z_A|} = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$ et qu'un argument de z_B est $-\dfrac{\pi}{4}$.

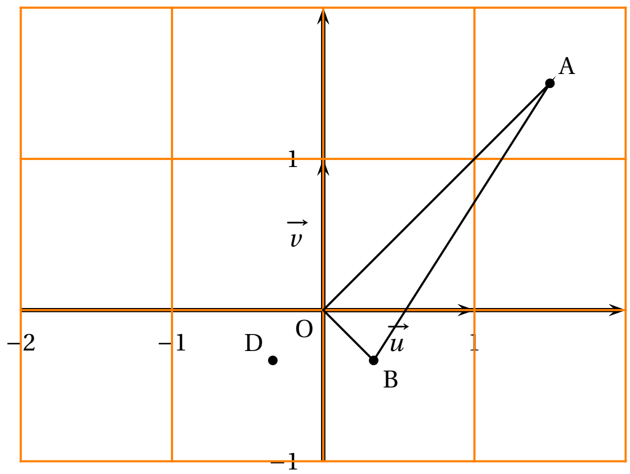
4. **a.** Voir à la fin.

b. On a $\left(\overrightarrow{OB}\ ;\ \overrightarrow{OA}\right) = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$. Donc le triangle OAB est rectangle en O.

5. **a.** $z_{C'} = \dfrac{1}{z_C} = \dfrac{1}{\text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{8}}} = \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{8}}$.

b. On a $\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{4}} \times z_C = \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{4}} \times \text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{8}} = \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{8}} = z_{C'}$. Cette égalité montre que le point C′ est l'image de C par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$.

6. L'affixe du vecteur de la translation qui transforme D en A est $z_{\overrightarrow{DA}} = z_A - z_D = \dfrac{3}{2} + \dfrac{3}{2}\text{i} - \left(-\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3}\text{i}\right) = \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{3} + \text{i}\left(\dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{11}{6} + \text{i}\dfrac{11}{6}$.



EXERCICE 2 **5 points**

1. On a $p(\text{A}_1) = \dfrac{1}{4}$, donc $p\left(\overline{\text{A}_1}\right) = 1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$.
2. On a $p\left(\overline{\text{A}_1} \cap \text{A}_2\right) = \dfrac{3}{4} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{16}$.
3. On a $p\left(\text{A}_1 \cap \text{A}_2\right) = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{16}$.
4. **a.** La probabilité de n'avoir aucun tirage A est égale à $\dfrac{3}{4} \times \dfrac{3}{4} = \dfrac{9}{16}$. Donc $p(G = -2) = \dfrac{9}{16}$.

   b. On a $G \in \{-2 ; 1 ; 10\}$.

   c. Le joueur reçoit 12 €avec une probabilitéde $p\left(\text{A}_1 \cap \text{A}_2\right) = \dfrac{1}{16}$.

   Le résultat A est obtenu au deuxième lancer avec la probabilité $p\left(\overline{\text{A}_1} \cap \overline{\text{A}_2}\right) = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{3}{4} = \dfrac{3}{16}$.

   Donc la probabilité d'avoir un seul résultat A est égale à $p\left(\overline{\text{A}_1} \cap \text{A}_2\right) + p\left(\text{A}_1 \cap \overline{\text{A}_2}\right) = \dfrac{3}{16} + \dfrac{3}{16} = \dfrac{6}{16}$.

   On a donc le tableau de la loi de probabilité de la variable G suivant :

valeurs de G	-2	1	10
$p\left(G = g_i\right)$	$\dfrac{9}{16}$	$\dfrac{6}{16}$	$\dfrac{1}{16}$

   d. On a $p(G > 0) = \dfrac{6}{16} + \dfrac{1}{16} = \dfrac{7}{16}$.

   e. On a $\text{E}(G) = -2 \times \dfrac{9}{16} + 1 \times \dfrac{6}{16} + 10 \times \dfrac{1}{16} = -\dfrac{7}{16} \approx 0,44$ €.

   Sur un grand nombre de parties le joueur perdra à peu près 44 centimes d'euro par partie.

PROBLÈME **10 points**

Partie A

h est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $h'(x) = \dfrac{a}{x}$.

La droite T a un coefficient directeur égal à $\dfrac{3-1}{1-0} = 2$. On a donc $f'1) = 2 \iff \dfrac{a}{1} = 2 \iff a = 2$.

D'autre part $h(1) = 3 \iff a \ln 1 + b = 3 \iff b = 3$.

La fonction h est donc définie par : $h(x) = 2\ln x + 3$ sur $\mathbb{R}_+$.

Partie B

1. g somme de produits de fonctions dérivables sur $]0 ; +\infty[$ est dérivable et sur cet intervalle :

   $g'(x) = 2\ln x + 2x \times \dfrac{1}{x} + 1 = 2\ln x + 3 = h(x)$.
2. Sur $]0 ; +\infty[$, $\quad 2\ln x + 3 > 0 \iff 2\ln x > -3 \iff \ln x > -\dfrac{3}{2}$ et par croissance de la fonction exponentielle $x > \text{e}^{-\frac{3}{2}}$.

   Donc $S = \left]\text{e}^{-\frac{3}{2}} ; +\infty\right[$.

3. Déterminer les limites de la fonction g en 0 et en $+\infty$. On sait que $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$, donc $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = -1$.
   D'autre part $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ donc par somme de limites $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.
4. On a vu que sur $\left]\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}\ ;\ +\infty\right[$, $g'(x) > 0$, donc g est croissante sur cet intervalle.
   On montre de même que sur $\left]0\ ;\ \mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}\right[$, $g'(x) < 0$, donc g est décroissante sur cet intervalle.
   D'où le tableau de variations suivant :

x	0		$\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$			
g	-1	$\searrow$	$-2\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}} - 1$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

5. Le tableau de variations montre que sur $]0\ ;\ 1[$, on a $g(x) < 0$ et sur $]1\ ;\ +\infty[$, $g(x) > 0$.

Partie C

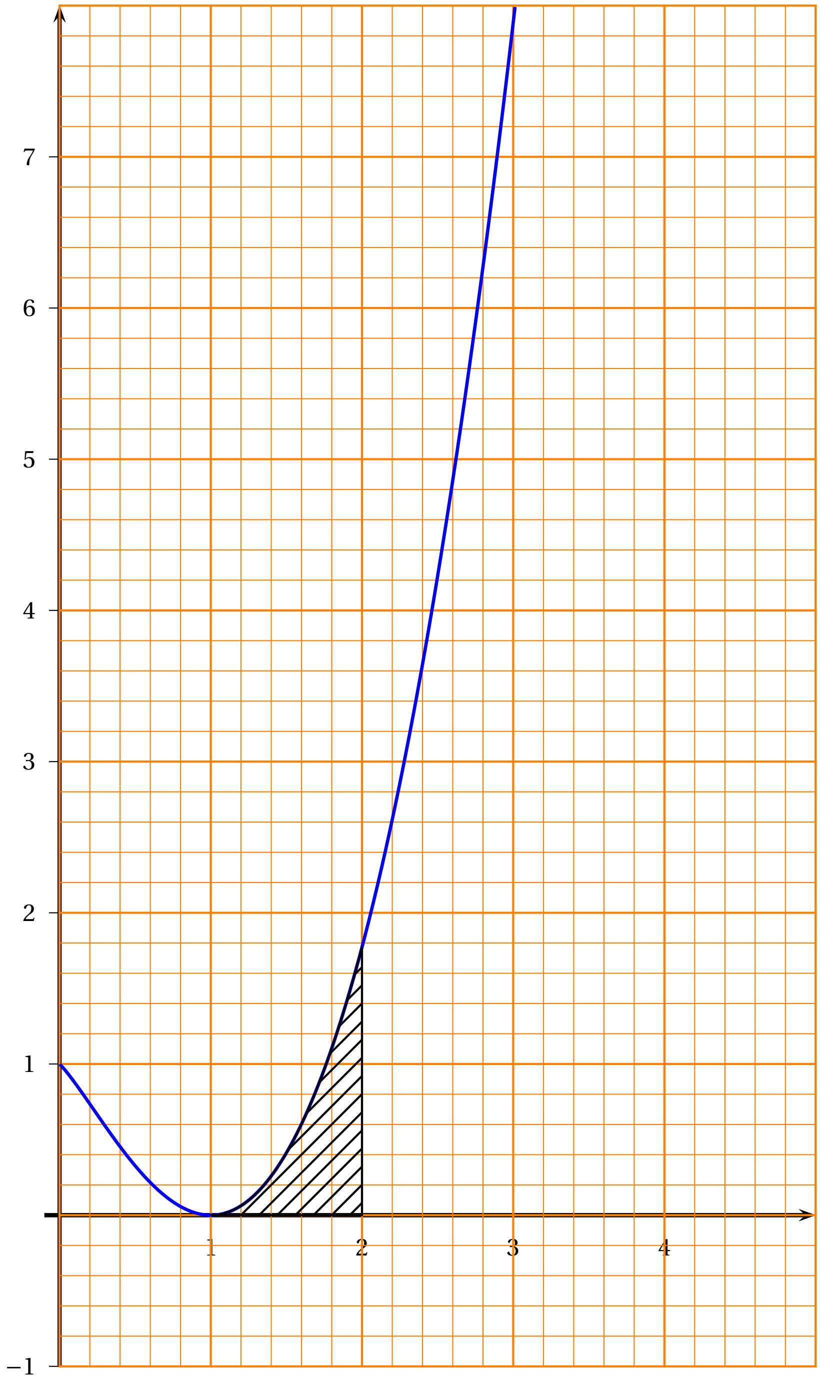
1. On a $f(x) = x(x\ln x - 1) + 1$. Donc comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$, on obtient par produit de limites $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
2. **a.** On a $f'(x) = 2x\ln x + x^2 \times \dfrac{1}{x} - 1 = 2x\ln x + x - 1 = g(x)$.
   b. Le signe de $f'(x)$ est donc celui de g vu à la question 5 de la partie B. Donc :
   $f'(x) < 0$ sur $]0\ ;\ 1[$, donc f est décroissante sur cet intervalle et $f'(x) > 0$ sur $]1\ ;\ +\infty[$, donc f est croissante sur cet intervalle.
3.

x	0,2	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$f(x)$	0,7	0,3	0	0,4	1,8	4,2	7,9

4. Voir à la fin.

Partie D

1. **a.** Voir la figure
   b. Chaque petit carré a une aire de $\dfrac{4}{25}$ cm^2. La surface hachurée contient à peu près 14 petits carrés soit $14 \times \dfrac{4}{25} = \dfrac{56}{25} = 2{,}24\text{cm}^2$. On a donc $2 < \mathscr{A} < 3$.
2. La fonction f est positive, donc l'aire $\mathscr{A}$ de Δ en unité d'aire est égale à l'intégrale :
   $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_1^2 = F(2) - F(1) = \frac{2^3}{3}\ln 2 - \frac{2^3}{9} - \frac{2^2}{2} + 2 - \left[\frac{1^3}{3}\ln 1 - \frac{1^3}{9} - \frac{1^2}{2} + 1\right] = \frac{8}{3}\ln 2 - \frac{8}{9} - 2 + 2 - \left[-\frac{1}{9} - \frac{1}{2} + 1\right] = \frac{8}{3}\ln 2 - \frac{8}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{2} - 1 = \frac{8}{3}\ln 2 - \frac{7}{9} - \frac{1}{2} \approx$ 0,5706 unité d'aire.
   Or une unité d'aire vaut $2 \times 2 = 4$ cm^2.
   Donc $\mathscr{A} = 4\left(\dfrac{8}{3}\ln 2 - \dfrac{7}{9} - \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{32}{3}\ln 2 - \dfrac{28}{9} - 2 \approx 2{,}282$ cm^2.


7
6
5
4
3
2
1
−1
1
2
3
4