Corrigé du baccalauréat STI Nouvelle–Calédonie novembre 2011
Génie électronique, électrotechnique et optique

EXERCICE 1 **4,5 points**

1. a.

1re boule \ 2e boule	V_1	V_2	V_3	R_0	R_5
V_1	0	0	0	10	15
V_2	0	0	0	20	25
V_3	0	0	0	30	35
R_0	10	20	30	0	0
R_5	15	25	35	0	0

b. Dans 13 cas sur 25 le joueur ne reçoit rien : la probabilité est donc égale à $\dfrac{13}{25} = \dfrac{52}{100} = 0,52$.

Le joueur reçoit plus de 20 euros dans 6 cas sur 25, d'où une probabilité de $\dfrac{6}{25} = \dfrac{24}{100} = 0,24$.

2. a. On construit le tableau des « gains » en retranchant 15 de chaque cas du tableau précédent :

1re boule \ 2e boule	V_1	V_2	V_3	R_0	R_5
V_1	−15	−15	−15	−5	0
V_2	−15	−15	−15	5	10
V_3	−15	−15	−15	15	20
R_0	−5	5	15	−15	−15
R_5	0	10	20	−15	−15

On en déduit le tableau de la loi de probabilité de la variable aléatoire X :

x_i	−15	−5	0	5	10	15	20
$p(X = x_i)$	$\frac{13}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{2}{25}$

b. On a $\mathrm{E}(X) = -15\times\dfrac{13}{25} - 5\times\dfrac{2}{25} + 0\times\dfrac{2}{25} + 5\times\dfrac{2}{25} + 10\times\dfrac{2}{25} + 15\times\dfrac{2}{25} + 20\times\dfrac{2}{25} = \dfrac{-195-10+0+10+20+30+40}{25} = -\dfrac{105}{25} = -\dfrac{21}{5} = -4,20$ (€).

Sur un grand nombre de parties la perte moyenne pour un joueur est égale à 4,20 €.

c. En remplaçant 15 par un mise de m euros on obtient une nouvelle loi de probabilité :

x_i	$-m$	$10-m$	$10-m$	$15-m$	$20-m$	$25-m$	$30-m$	$35-m$
$p(X = x_i)$	$\frac{13}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{2}{25}$

On a alors :

$\mathrm{E}(X) = -m\times\dfrac{13}{25} + (10-m)\times\dfrac{2}{25} + (15-m)\times\dfrac{2}{25} + (20-m)\times\dfrac{2}{25} + (25-m)\times\dfrac{2}{25} + (30-m)\times\dfrac{2}{25} + (35-m)\times\dfrac{2}{25} =$

$$\frac{-13m+20-2m+30-2m+40-2m+50-2m+60-2m+70-2m}{25}=\frac{270-25m}{25}$$

Le leu est équitable si l'espérance est nulle :

$\text{E}(X)=0 \iff \dfrac{270-25m}{25}=0 \iff 270-25m=0 \iff 270=25m \iff 54=5m \iff m\dfrac{54}{5}=\dfrac{108}{10}=10,80$ €.

Le jeu est équitable si la mise est égale à 10,80 €.

EXERCICE 2 **5,5 points**

1. **a.** $P(-3)=(-3)^3+5\times(-3)^2+10\times(-3)+12=-27+45-30+12=57-57=0$.
   -3 est donc une racine de P. Il existe donc des complexes b et c tels que :
   $P(z)=(z+3)\left(z^2+bz+c\right)=z^3+bz^2+cz+3z^2+3bz+3c=z^3+(b+3)z^2+(3b+c)z+3c$.
   En identifiant avec l'énoncé, on obtient le système :
   $$\left\{\begin{array}{lcl} b+3&=&5\\ 3b+c&=&10\\ 3c&=&12\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} b+3&=&5\\ 3b+c&=&10\\ c&=&4\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} b+3&=&5\\ 3b&=&6\\ c&=&4\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} b+3&=&5\\ b&=&2\\ c&=&4\end{array}\right.$$
   Finalement : $P(z)=(z+3)\left(z^2+2z+4\right)$.

   b. $P(z)=0 \iff (z+3)\left(z^2+2z+4\right)=0 \iff \left\{\begin{array}{lcl} z+3&=&0\\ z^2+2z+4&=&0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} z&=&-3\\ z^2+2z+4&=&0\end{array}\right.$
   Résolution de l'équation du second degré : $\Delta=4-4\times4=-12=\left(2\text{i}\sqrt{3}\right)^2<0$: il y a donc deux racines complexes :
   $z_2=\dfrac{-2+2\text{i}\sqrt{3}}{2}=-1+\text{i}\sqrt{3}$ et $z_3=-1-\text{i}\sqrt{3}$.
   Finalement les solutions sont :
   $$z_1=-3;\quad z_2=-1+\text{i}\sqrt{3};\quad z_3=-1-\text{i}\sqrt{3}.$$

2. **a.** Voir la figure
   b. Voir la figure
   c. L'angle vaut 90 degrés.
   d. Il semble que les points O, B et S sont alignés.

3. **a.** On a $z_{\text{B}'}=z_{\text{B}}+4=-1+\text{i}\sqrt{3}+4=3+\text{i}\sqrt{3}$.
   D'où $\left|z_{\text{B}'}\right|^2=3^2+\left(\sqrt{3}\right)^2=9+3=12$ et $\left|z_{\text{B}'}\right|=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$.
   En factorisant ce module on a :
   $z_{\text{B}'}=2\sqrt{3}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\text{i}\dfrac{1}{2}\right)$.
   Or $\cos\frac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\frac{\pi}{6}=\dfrac{1}{2}$, donc
   $z_{\text{B}'}=2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6}+\text{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)=2\sqrt{3}\text{e}^{\frac{\pi}{6}}$.

   b. On admet que S est l'image du point B$'$ par la rotation r de centre O et d'angle $+\frac{\pi}{2}$. On a donc :
   $z_{\text{S}}=\text{e}^{\frac{\text{i}\pi}{2}}z_{\text{B}'}=2\sqrt{3}\text{e}^{\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}}=2\sqrt{3}\text{e}^{\frac{4\pi}{6}}=2\sqrt{3}\text{e}^{\frac{2\pi}{3}}$.

c. $z_B = -1 + i\sqrt{3}$. Donc $|z_B|^2 = 1 + 3 = 4 \Rightarrow |z_B| = 2$.
En factorisant ce module :
$z_B = 2\left(-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
Or $\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ et $\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, donc
$z_B = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = 2e^{\frac{2\pi}{3}}$.
Conclusion : B et S ont des affixes de même argument : ils sont alignés avec O.

PROBLÈME **10 points**

Partie A

1. g somme de fonctions dérivables sur I est dérivable sur cet intervalle et :
$g'(x) = 2x - \dfrac{2}{x} = \dfrac{2x^2 - 2}{x} = \dfrac{2}{x}\left(x^2 - 1\right)$.
Comme $x > 0 \Rightarrow \dfrac{1}{x} > 0$: le signe de $g'(x)$ est donc celui du trinôme $x^2 - 1$. Celui-ci est positif sauf entre les racines -1 et 1, donc ici :
$g'(x) < 0$ sur $]0\ ;\ 1[$;
$g'(x) > 0$ sur $]1\ ;\ +\infty[$;
$g'(1) = 0$.
2. De la question précédente résulte que :
g est décroissante sur $]0\ ;\ 1[$;
g est croissante sur $]1\ ;\ +\infty[$;
$g(1) = 1 + 2 = 3$ est le minimum de g sur I.

x	0	1	$+\infty$
g	↘	3	↗

3. On constante que sur I, $g(x) \geqslant 3 > 0$: la fonction est donc strictement positive sur I.

Partie B

1. **a.** De $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0} x = 0_+$ on déduit que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln x}{x} = -\infty$ et comme $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{2}x - 1 = -1$, par somme de limites, on conclut que :
$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$.
b. Géométriquement le résultat précédent signifie que la droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à $\mathscr{C}$ au voisinage de zéro.
2. **a.** On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{2}x = +\infty$, d'où par somme de limites :
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
b. Soit d la fonction définie sur I par : $d(x) = f(x) - \left(\dfrac{1}{2}x - 1\right) = \dfrac{\ln x}{x}$.
Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} d(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$, ceci montre que la droite Δ d'équation $y = \dfrac{1}{2}x - 1$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$.

c. On a $d(x) > 0 \iff \dfrac{\ln x}{x} > 0 \iff \ln x > 0 \iff x > 1$: ceci signifie que la courbe $\mathscr{C}$ est au dessus de la droite (Δ) sur l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$.
De même on a $d(x) < 0 \iff x < 1$: ceci signifie que la courbe $\mathscr{C}$ est au dessus de la droite (Δ) sur l'intervalle $]0\ ;\ 1[$.

3. a. La fonction f somme de fonctions dérivables sur I est dérivable sur I et :
$f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x} \times x - 1 \times \ln x}{x^2} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{1 - \ln x}{x^2} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{2 - 2\ln x + x^2}{2x^2} = \dfrac{g(x)}{2x^2}$.

b. Comme $2x^2 > 0$ sur I, le signe de $f'(x)$ est donc celui de $g(x)$ qui a été trouvé à la question A 3. Donc $g(x) > 0$ sur I entraîne $f'(x) > 0$: la fonction f est donc croissante sur I.
D'où le tableau de variation :

x	0		1		$+\infty$
f	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

4. a. $f(1) = 0 + \dfrac{1}{2} - 1 = -\dfrac{1}{2}$;
$f(2) = \dfrac{\ln 2}{2} + \dfrac{1}{2} \times 2 - 1 = \dfrac{\ln 2}{2} \approx 0,345$.

b. Sur l'intervalle $[1\,;\,2]$, la fonction f est strictement croissante de $-\dfrac{1}{2} < 0$ à $\dfrac{\ln 2}{2} > 0$: il existe donc un unique réel $\alpha \in]1\ ;\ 2[$ tel que $f(\alpha) = 0$

c. La calculatrice donne :
$f(1,4) \approx -0,06$ et $f(1,5) \approx 0,02$, donc $1,4 < \alpha < 1,5$;
$f(1,47) \approx -0,003$ et $f(1,48) \approx 0,005$, donc $1,47 < \alpha < 1,48$.

5. $f(1) = -\dfrac{1}{2}$ et $f'(1) = \dfrac{2 - 2\ln 1 + 1^2}{2 \times 1^2} = \dfrac{3}{2}$.
$M(x\ ;\ y) \in T \iff y - f(1) = f'(1)(x-1) \iff y + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}(x-1) \iff y = \dfrac{3}{2}x - 2$.

6. Voir à la fin

Partie C

1. h produit de fonctions dérivables sur I est dérivable sur I et
$h'(x) = \dfrac{1}{2} \times 2 \times \ln x \times \dfrac{1}{x} = \dfrac{\ln x}{x}$.

2. On vient de démontrer que h est une primitive de $\dfrac{\ln x}{x}$ sur I donc en particulier sur l'intervalle $[2\ ;\ \mathrm{e}]$ et
$\displaystyle\int_2^{\mathrm{e}} \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = [h(x)]_2^{\mathrm{e}} = h(\mathrm{e}) - h(0) = \frac{1}{2}(\ln \mathrm{e})^2 - \left(\frac{1}{2}(\ln 2)^2\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(\ln 2)^2 = \frac{1}{2}\left[1 - (\ln 2)^2\right]$.

3. On a vu que pour $x > 1$, la courbe $\mathscr{C}$ est au dessus de son asymptote Δ. On a donc l'aire $\mathscr{A}$ qui est égale (en unités d'aire) à l'intégrale de la différence de $f(x)$ et de $\dfrac{1}{2}x - 1$.
$\mathscr{A} = \displaystyle\int_2 \mathrm{e}\frac{\ln x}{x} + \frac{1}{2}x - 1 - \left(\frac{1}{2}x - 1\right) = \int_2^{\mathrm{e}} \frac{\ln x}{x}$, soit d'après la question précédente :
$\mathscr{A} = h(\mathrm{e}) - h(2) = \dfrac{1}{2}\left[1 - (\ln 2)^2\right]$ unités d'aire.
Or une unité d'aire vaut $4 \times 4 = 16$ cm^2
Donc $\mathscr{A} = 16 \times \dfrac{1}{2}\left[1 - (\ln 2)^2\right] = 8\left[1 - (\ln 2)^2\right] \approx 4,16$ cm^2.

Annexe : à rendre avec la copie

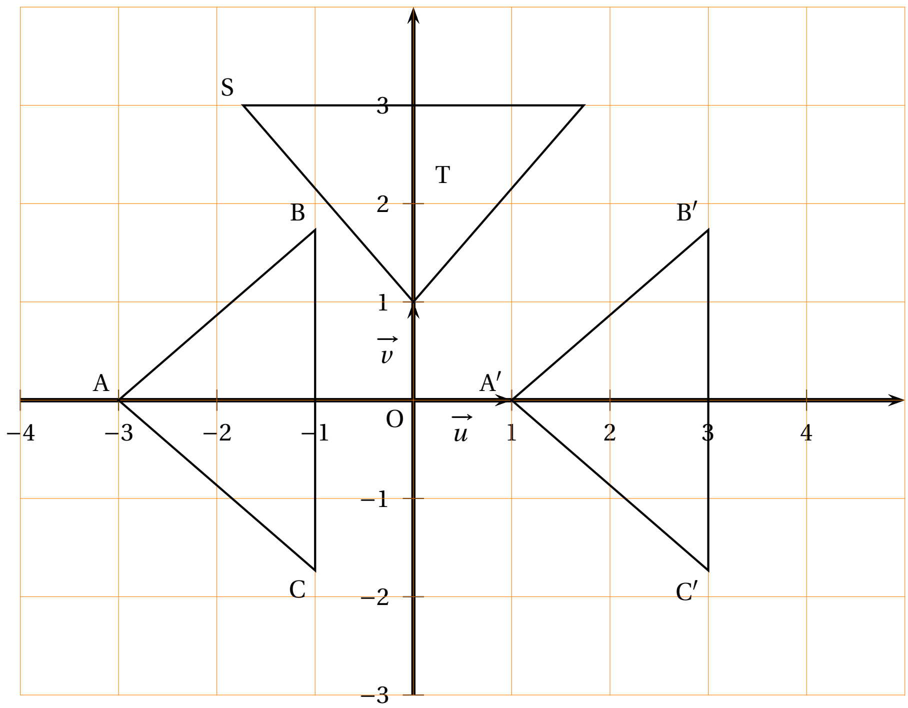

Figure du problème