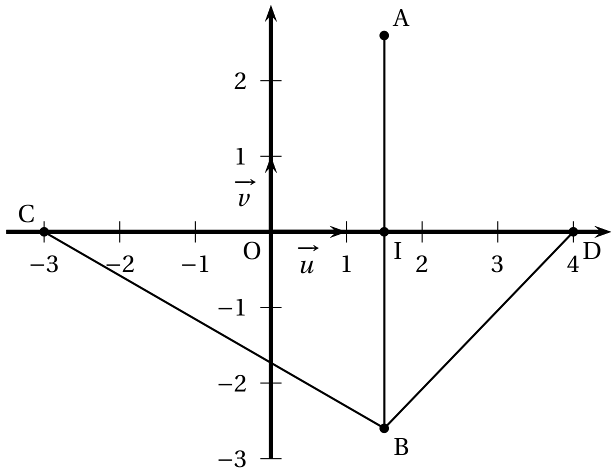
Durée : 4 heures

Corrigé du baccalauréat STI La Réunion juin 2007 Génie électronique, électrotechnique, optique

EXERCICE 1 **5 points**

1. $\Delta = 9 - 4\times 9 = -3\times 9 = \left(3\sqrt{3}\text{i}\right)^2$.
   L'équation a donc deux solutions complexes conjuguées :
   $$\dfrac{3+3\text{i}\sqrt{3}}{2} \quad ; \quad \dfrac{3-3\text{i}\sqrt{3}}{2}.$$
2. **a.** On a $|z_A|^2 = \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \dfrac{9}{4}+\dfrac{27}{4} = 9 = 3^2$. Donc $|z_A| = 3$.
   On peut donc écrire $z_A = 3\left(\dfrac{1}{2}+\text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 3\left(\cos\frac{\pi}{3}+\text{i}\sin\frac{\pi}{3}\right) = 3\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}$ (écriture exponentielle). Un argument de z_A est $\dfrac{\pi}{3}$.
   Comme z_B est le conjugué de z_A son module est égal à 3 et un de ses arguments est $-\dfrac{\pi}{3}$. On a donc $3\text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{3}}$
   b. Voir ci-dessous.
   c. Les points A et B sont symétriques par rapport à l'axe $\left(\text{O} ; \vec{u}\right)$ car les complexes z_B et z_A sont conjugués.
3. **a.** On sait que $z' = z\text{e}^{\text{i}\frac{-2\pi}{3}}$.
   b. Cherchons l'image A′ du point A : $z_{A'} = z_A\text{e}^{\text{i}\frac{-2\pi}{3}} = 3\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}\text{e}^{\text{i}\frac{-2\pi}{3}} = 3\text{e}^{\text{i}\frac{-\pi}{3}} = z_B$.
   On a bien $\text{B} = R(\text{A})$.
4. **a.** Voir plus bas.
   b. $\text{OD} = |z_D| = \sqrt{(4)^2} = 4$.
   $\text{DC} = \sqrt{(-3-4)^2} = 7$;
   $\text{AB} = \sqrt{(3\sqrt{3})^2} = 3\sqrt{3}$.
   c. On a $z_I = \dfrac{1}{2}(z_A+z_B) = \dfrac{3}{2}$. $\text{IB} = \sqrt{\left(-\dfrac{3}{2}\sqrt{3}\right)^2} = \dfrac{3}{2}\sqrt{3}$.
   A et B étant symétriques autour de $\left(\text{O} ; \vec{u}\right)$, le point I est sur cet axe et [BI] est hauteur du triangle CBD.
   L'aire de ce triangle est donc égale à $\mathcal{A}_1 = \dfrac{\text{CD}\times\text{BI}}{2} = \dfrac{7\times\frac{3\sqrt{3}}{2}}{2} = \dfrac{21\sqrt{3}}{4}$.
   d. $\mathcal{A}_2 = \dfrac{\text{OD}\times\text{AI}}{2} = \dfrac{4\times\frac{3\sqrt{3}}{2}}{2} = 3\sqrt{3}$.
   Donc $\dfrac{\mathcal{A}_1}{\mathcal{A}_1} = \dfrac{\frac{21\sqrt{3}}{4}}{3\sqrt{3}} = \dfrac{7}{4}$.



EXERCICE 2 **5 points**

1. Les trajets possibles sont :
ABC AFE BCD BAF CAB CDE.
2. **a.** Il y a deux trajets qui finissent en E, donc $p_1 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

   b. Il y a 4 chemins finissant par le sas 2, donc $p_2 = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.
3. **a.** X peut prendre les valeurs : 56 58 66 68 74.

   b.

x_i	56	58	66	68	74
$p(X = x_i)$	1/6	1/6	1/6	1/6	2/6

   c. $E(X) = 56 \times \frac{1}{6} + 58 \times \frac{1}{6} + 66 \times \frac{1}{6} + 68 \times \frac{1}{6} + 74 \times \frac{2}{6} = 66$ (min)
   Cette espérance représente le temps moyen que mettra le robot pour nettoyer trois salles.

   d. On a temps inférieur à 60 minutes dans 2 cas sur 6, soit $p_3 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.
4. **a.** On a $\sigma(X)^2 = \frac{(66-56)^2 + (60-58)^2 + (66-66)^2 + (68-66)^2 + 2 \times (74-66)^2}{6} =$
$\frac{100+4+0+4+128}{6} = \frac{232}{6} = \frac{116}{3}$. Donc $\sigma(X) \approx 6,22$.

   b. En faisant travailler le robot 365 jours on a $365 \times E(X) + 1,5 \times \sigma(X) \times \sqrt{365} = 365 \times 66 + 1,5 \times 6,22 \times \sqrt{365} = 24\,268,2$ (min) soit environ 407,5 h. C'est donc acceptable.

PROBLÈME **10 points**

Partie A : étude d'une fonction auxiliaire g

1. Sur $]0 ; +\infty[$, g produit de fonctions dérivables est dérivable et :
$g'(x) = 1 + \ln x + x \times \frac{1}{x} = 1 + \ln x + 1 = 2 + \ln x$.
2. $2 + \ln x > 0 \iff \ln x > -2 \iff \ln x > \ln e^{-2} \iff x > e^{-2}$, par croissance de la fonction logarithme népérien.
De même $2 + \ln x < 0 \iff x < e^{-2}$. Conclusion : sur $\left]0 ; e^{-2}\right[$, $g'(x) > 0 \Rightarrow g$ est décroissante ;
$\left]e^{-2} ; +\infty\right[$, $g'(x) < 0 \Rightarrow g$ est croissante.

3. Le minimum de g est donc $g\left(\mathrm{e}^{-2}\right) = 1+\mathrm{e}^{-2}\left(1+\ln \mathrm{e}^{-2}\right) = 1+\mathrm{e}^{-2}(1-2) = 1-\mathrm{e}^{-2}$.
4. Comme $1-\mathrm{e}^{-2} \approx 0,86 > 0$, on en déduit que la fonction g est positive sur $]0~;~+\infty[$.

Partie B : étude de la fonction *f*

1. **a.** On a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x = \lim_{x\to+\infty} = +\infty$, on peut en conclure que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

   b. $f(x)$ peut s'écrire : $f(x) = x\ln x + \ln x$.
   On sait que $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\ln x = 0$; comme $\displaystyle\lim_{x\to 0} \ln x = -\infty$, on peut en conclure que $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$.
   Géométriquement ceci montre que l'axe des ordonnées est asymptote verticale à $\mathscr{C}$ au voisinage de 0.
2. **a.** f produit de fonctions dérivables sur $]0~;~+\infty[$ est dérivable sur cet intervalle et
   $f'(x) = \ln x + (x+1)\times\dfrac{1}{x} = \dfrac{x\ln x + x + 1}{x} = \dfrac{1+x(1+\ln x)}{2} = \dfrac{g(x)}{x}$.

   b. On a vu partie A, question 4 que $g(x) > 0$ sur $]0~;~+\infty[$; donc $f'(x) > 0$ sur $]0~;~+\infty[$ et la fonction f est croissante sur cet intervalle. D'où le tableau de variations :

x	0	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

3. Il faut résoudre dans $]0~;~+\infty[$, l'équation $f(x) = 0 \iff (x+1)\ln x \iff \left\{\begin{array}{lcl} x+1 &=& 0\\ \ln x &=& 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} x &=& -1\\ x &=& 1\end{array}\right.$
   Seul $1 \in]0~;~+\infty[$, donc A(1 ; 0).
4. La fonction f est croissante sur $[1~;~2]$, $f(1) = 0$ et $f(2) = 3\ln 2 \approx 2,08 > 1$.

Il existe donc un unique réel $\alpha \in [1~;~2]$, tel que $f(\alpha) = 1$.
La calculatrice donne $f(1,4) \approx 0,8$ et $f(1,5) \approx 1,01$
Puis $f(1,49) \approx 0,993$ et $f(1,50) \approx 1,013$.
Conclusion $\alpha \approx 1,5$ à un dixième près.

5. Voir à la fin

Partie C : calcul d'une aire

1. Sur $]0~;~+\infty[$, F est dérivable et
   $F'(x) = (x+1)(\ln x - 1) + \left(\dfrac{x^2}{2} + x\right)\times\dfrac{1}{x} + \dfrac{2x}{4} = x\ln x - x + \ln x - 1 + \dfrac{x}{2} + 1 + \dfrac{x}{2} = x\ln x + \ln x = (x+1)\ln x = f(x)$.
   Donc F est une primitive de f sur $]0~;~+\infty[$
2. **a.** Voir plus bas.

   b. On a vu que $x \geqslant 1 \Rightarrow f(x) \geqslant 0$. Donc l'aire, en unité d'aire de la partie $\mathscr{E}$ est égale à l'intégrale :
   $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_1^{\mathrm{e}} = F(\mathrm{e}) - F(1) = \left(\dfrac{\mathrm{e}^2}{2} + \mathrm{e}\right)(\ln \mathrm{e} - 1) + \dfrac{\mathrm{e}^2}{4} - \left(\left(\dfrac{1^2}{2} + 1\right)(\ln 1 - 1) + \dfrac{1^2}{4}\right) = \dfrac{\mathrm{e}^2}{4} + \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{5}{4} + \dfrac{\mathrm{e}^2}{4} = \dfrac{5+\mathrm{e}^2}{4}$. (u. a.)

Or l'unité graphique est égale à $2 \times 2 = 4$ cm^2. Donc l'aire de la partie $\mathscr{E}$ est égale à :

$4 \times \dfrac{5 + \mathrm{e}^2}{4} = 5 + \mathrm{e}^2$.